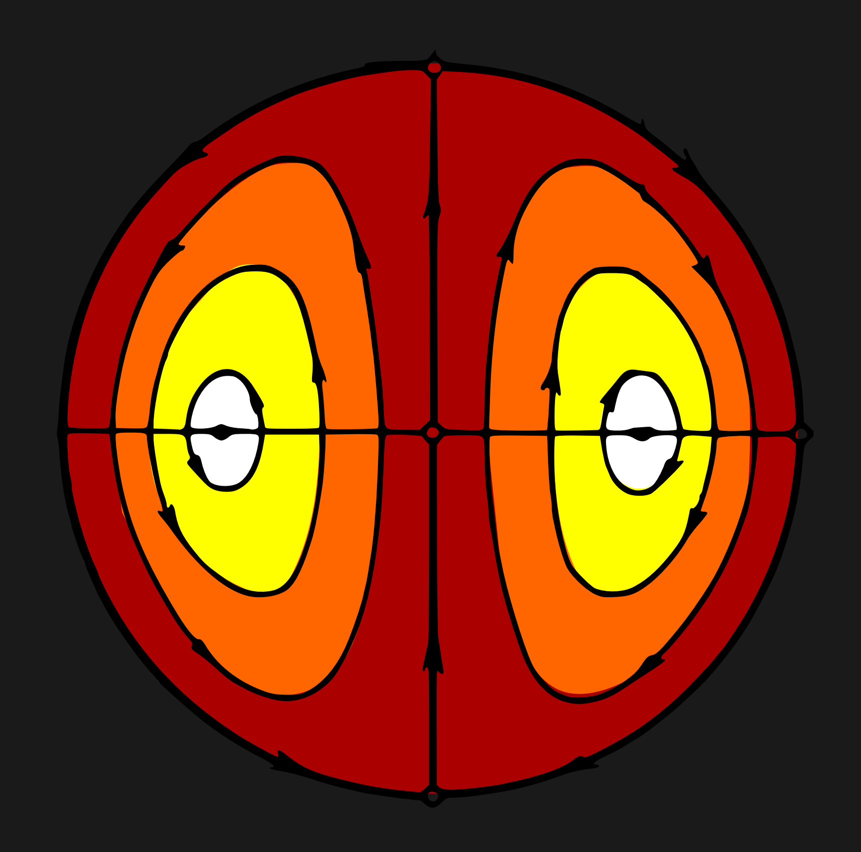
V. Dmitriev, L. Tarassov

OPTIQUE NON LINÉAIRE APPLIQUÉE



Éditions Mir Moscou

В. Г. ДМИТРИЕВ, Л. В. ТАРАСОВ

ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА

Генераторы второй гармоники и параметрические генераторы света

МОСКВА
«РАДИО И СВЯЗЬ»

V. DMITRIEV, L. TARASSOV

OPTIQUE NON LINÉAIRE APPLIQUÉE

GÉNÉRATEURS DE DEUXIÈME HARMONIQUE OPTIQUE ET GÉNÉRATEURS PARAMÉTRIQUES DE LUMIÈRE



ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par V. KOLIMÉEV

На французском языке

PRÉFACE

L'avènement des lasers au début des années 60 a donné une impulsion puissante au développement de l'optique non linéaire dont les succès, à leur tour, ont conduit à la réalisation de nouveaux progrès dans la technique du laser et notamment à la création de générateurs hautement efficaces d'harmoniques optiques et de générateurs paramétriques de lumière qui ont permis d'élargir considérablement la gamme des fréquences utilisées pour le rayonnement cohérent et de trouver des voies prometteuses pour le réglage continu de la fréquence.

Le présent ouvrage est consacré à l'étude de la physique des générateurs de deuxième harmonique optique et des générateurs paramétriques de lumière. Il fait suite à la monographie de L. Tarassov *Physique des processus dans les générateurs de rayonnement optique cohérent* consacrée à la physique des lasers (publiée par les Editions Mir en langue française en 1985).

Les auteurs ont cherché à exposer de façon systématique la physique des convertisseurs optiques non linéaires de fréquence, les méthodes de calcul utilisées, l'influence de l'ensemble des divers facteurs sur le fonctionnement des appareils et dispositifs considérés. Dans le livre sont examinées de nombreuses directions nouvelles dans le développement des générateurs de deuxième harmonique; sont étudiés les effets d'ouverture de diaphragme et d'angle, les questions de la focalisation du faisceau de rayonnement fondamental, l'inhomogénéité de la biréfringence, les effets liés aux auto-actions thermiques, l'effet photoréfractif, le retard de groupe dans le cas du pompage par impulsions picosecondes, le pompage par rayonnement multifréquence produit par les lasers à modes non synchronisés ou synchronisés, et certaines autres questions.

Un chapitre est consacré à la génération de deuxième harmonique à l'intérieur de la cavité résonnante et, en particulier, aux lasers à milieux actifs non linéaires. Dans l'étude de la génération paramétrique, les cas de pompage continu et impulsionnel sont examinés séparément ; on passe en revue certains types tout nouveaux de générateurs paramétriques : à onde régressive, à pompage par impul-

sions picosecondes, à injection du rayonnement sur la fréquence de résonance, à résonateur instable, etc. Le livre contient un grand nombre de schémas, utilisés dans la pratique, des générateurs à production de deuxième harmonique à l'extérieur et à l'intérieur de la cavité résonnante, ainsi que des générateurs paramétriques de lumière.

Les méthodes de calcul des convertisseurs optiques non linéaires de fréquence, analysées dans ce livre, sont basées sur des modifications appropriées des systèmes d'équations tronquées qui ont été examinés pour la première fois dans la monographie fondamentale de S. Akhmanov et R. Khokhlov *Problèmes de l'optique non linéaire.* Les auteurs examinent les différentes approches et approximations et analysent des modèles physiques qui reflètent d'une manière adéquate les situations réelles.

Ce livre s'adresse aux chercheurs et aux ingénieurs, spécialistes de la technique des lasers, de l'optique non linéaire, ainsi que dans les domaines connexes. Les auteurs espèrent qu'il sera tout aussi profitable aux étudiants, aux boursiers de thèse et aux professeurs d'écoles supérieures pour l'élaboration des cours correspondants.

Les auteurs tiennent à remercier S. Akhmanov et M. Stelmakh, qui ont apporté leur aide et stimulé l'apparition de ce livre, D. Klychko, I. Matvéev, L. Koulevsky et A. Grassuk, qui leur ont prodigué remarques et suggestions. Ils expriment leur vive gratitude à A. Tarassova et S. Dmitrieva pour leur aide lors de la préparation du manuscrit.

CHAPITRE PREMIER

POLARISATION NON LINÉAIRE DES DIÉLECTRIQUES

§ 1.1. Polarisations non linéaires quadratique et cubique

Polarisation des diélectriques. — Les diélectriques soumis à un champ électrique extérieur *se polarisent.* Le champ provoque un déplacement des gaines d'électrons des atomes par rapport aux noyaux; il en résulte que les atomes acquièrent un moment électrique dipolaire. C'est une polarisation *électronique* du diélectrique. Outre la polarisation électronique, un champ électrique extérieur peut également induire d'autres types de polarisation. Ainsi, des déplacements relatifs des ions positifs et négatifs sous l'action d'un champ conduisent à une polarisation *ionique.* Si le milieu contient des dipôles constants (molécules dipolaires), il peut y avoir une polarisation *d'orientation* (*rotationnelle*) provoquée par la rotation des dipôles prenant la direction du champ appliqué.

C'est la polarisation électronique qui s'établit le plus vite: le déplacement de la gaine d'électrons de l'atome se produit en un temps de l'ordre de 10^{-15} à 10^{-14} s. L'établissement de la polarisation ionique exige un temps plus long, car le processus de déplacement des objets microscopiques plus lourds (ions) se caractérise par une inertie plus élevée. La polarisation ionique s'établit en un temps de l'ordre de 10^{-13} à 10^{-11} s. Le processus de rotation des molécules dipolaires est encore plus lent: la polarisation d'orientation se caractérise par des temps de l'ordre de 10^{-10} s et plus.

En tant que champ de polarisation nous considérerons une *onde lumineuse* se propageant dans un diélectrique. Dans un tel cas, la polarisation d'orientation est sans importance parce que le temps de son établissement est beaucoup plus grand que la période d'oscillations du champ de l'onde lumineuse. Dans le domaine *optique* (plus exactement, dans les portions ultraviolette, visible et infrae rouge proche du spectre), c'est la polarisation électronique qui joue un rôle prépondérant. Pour des longueurs d'onde de rayonnement d-l'ordre de 10 μm et plus, la polarisation ionique devient substantielle à côté de la polarisation électronique.

Vecteur de polarisation; équation de la mécanique. — La polarisation d'un diélectrique se décrit quantitativement par un *vec-*

teur polarisation **P** qui représente le moment électrique dipolaire de l'unité de volume du milieu, induit par le champ extérieur. La polarisation est la « réponse » du milieu à une action extérieure. Cette dernière se décrit par le vecteur intensité de champ électrique **E** (dans le cas considéré du champ d'onde lumineuse).

La relation entre les vecteurs **P** et **E** est une des *équations* dites *de la mécanique*. En *optique linéaire* on considère une équation de la mécanique *linéaire*

$$P_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} E_k \quad (i, k = 1, 2, 3), \tag{1.1.1}$$

où α_{ik} sont les composantes du tenseur de susceptibilité diélectrique. C'est un tenseur symétrique; par un choix convenable des axes de coordonnées il peut être mis sous la forme diagonale:

$$(\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.1.2}$$

Pour les milieux isotropes et les cristaux de système cubique on a $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha$. Dans ce cas, la relation (1.1.1) prend la forme

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E} \tag{1.1.3}$$

Le cas où $\alpha_{11} = \alpha_{22} \neq \alpha_{33}$ correspond aux cristaux *uniaxiaux* (ayant leur axe optique dirigé le long de l'axe des z). Ce sont des cristaux des systèmes tétragonal, hexagonal et trigonal. Le cas de $\alpha_{11} \neq \alpha_{22} \neq \alpha_{33}$ est celui des cristaux *biaxiaux* (cristaux de systèmes rhombique, monoclinique et triclinique). Lors de l'étude des phénomènes non linéaires on a principalement affaire aux cristaux uniaxiaux [1]).

Reportons-nous à l'expression bien connue pour le vecteur induction électrique **D**:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \tag{1.1.4}$$

En tenant compte de (1.1.1), on en tire

$$D_i = E_i + 4\pi \sum_k \alpha_{ik} E_k = \sum_k (\delta_{ik} + 4\pi\alpha_{ik}) E_k,$$

où δ_{ik} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ik} = 0$ si $i \neq k$; $\delta_{ik} = 1$ si $i = k$). En notant

$$\delta_{ik} + 4\pi\alpha_{ik} = \varepsilon_{ik} \tag{1.1.5}$$

---

[1]) Pour les éléments d'optique des cristaux uniaxiaux, voir, par exemple, § 4.3 de [1], ainsi que [2].

on obtient encore une écriture de l'équation de la mécanique

$$D_i = \sum_k \varepsilon_{ik} E_k, \qquad (1.1.6)$$

où ε_{ik} est le tenseur de *permittivité* du milieu.

Polarisations non linéaires quadratique et cubique. — La variation de la susceptibilité diélectrique du milieu en fonction de l'intensité d'un champ électrique statique extérieur était étudiée, bien avant l'avènement des lasers, dans le cadre des effets électro-optiques [1]). Après l'apparition des sources de lumière cohérente intense (lasers) on a commencé à étudier activement les effets optiques non linéaires, c'est-à-dire des effets basés sur la variation de la susceptibilité diélectrique en fonction de l'intensité du champ d'onde lumineuse qui se propage dans le milieu.

La prise en compte de la variation du tenseur de susceptibilité avec l'intensité de champ transforme l'équation de la mécanique linéaire (1.1.1) en une équation *non linéaire*:

$$P_i = \sum_k \alpha_{ik}(\mathbf{E}) E_k. \qquad (1.1.7)$$

C'est ainsi que se produit le passage de l'optique linéaire à l'optique *non linéaire.*

Développons $\alpha_{ik}(\mathbf{E})$ en une série de puissances de $\mathbf{E}$:

$$\alpha_{ik}(\mathbf{E}) = \alpha_{ik} + \sum_{j=1}^{3} \chi_{ikj} E_j + \sum_{j=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \theta_{ikjm} E_j E_m + \ldots, \qquad (1.1.8)$$

où α_{ik} est une susceptibilité *linéaire* (tenseur d'ordre 2); χ_{ikj} une susceptibilité *non linéaire quadratique* (tenseur d'ordre 3); θ_{ikjm} une susceptibilité *non linéaire cubique* (tenseur d'ordre 4). En principe, le développement (1.1.8) peut également tenir compte des termes traduisant des susceptibilités d'ordres plus élevés.

Des valeurs numériques caractéristiques des susceptibilités des diélectriques sont les suivantes [4]:

$$\alpha \approx 1\,;\ \chi \approx 10^{-12} \text{ à } 10^{-11} \text{ m/V}\,; \qquad (1.1.9)\ ^{2)}$$
$$\theta \approx 10^{-22} \text{ à } 10^{-21} \text{ m}^2/\text{V}^2.$$

Par exemple, les cristaux de KDP possèdent $\chi \approx 0{,}5 \cdot 10^{-12}$ m/V, $\theta \approx 2 \cdot 10^{-22}$ m²/V² et les cristaux de $LiNbO_3$: $\chi \approx 5 \cdot 10^{-12}$ m/V, $\theta \approx 2 \cdot 10^{-21}$ m²/V². En tenant compte du fait que l'intensité de champ d'un rayonnement laser n'excède pas 10^9 V/m, on peut conclure que les termes du développement (1.1.8) décroissent rapidement lorsque leur ordre augmente.

---

[1]) Voir par exemple § 4.4 de [1], ainsi que [3].

[2]) Les susceptibilités non linéaires *de résonance* d'ordres impairs qui sont réalisables dans les gaz prennent des valeurs relativement grandes.

Introduisant (1.1.8) dans (1.1.7), on obtient l'équation de la mécanique non linéaire suivante:

$$P_i = P_{1\,i} + P_{\mathrm{nl}\,i} = \sum_k \alpha_{ik} E_k + \sum_k \sum_j \chi_{ikj} E_k E_j + \sum_k \sum_j \sum_m \theta_{ikjm} E_k E_j E_m + \dots \quad (1.1.10)$$

Ici,

$$P_{1\,i} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} E_k \quad (1.1.11)$$

sont les composantes du vecteur de polarisation *linéaire*, et $P_{\mathrm{nl}\,i}$, les composantes du vecteur de polarisation *non linéaire*. Le vecteur de polarisation non linéaire $\mathbf{P}_{\mathrm{nl}}$ intervenant dans (1.1.10) est la somme du vecteur de polarisation *quadratique* $\mathbf{P}_{\mathrm{q}}$ et du vecteur de polarisation *cubique* $\mathbf{P}_{\mathrm{c}}$ définis par les relations suivantes:

$$P_{\mathrm{q}\,i} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \chi_{ikj} E_k E_j ; \quad (1.1.12)$$

$$P_{\mathrm{c}\,i} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \theta_{ikjm} E_k E_j E_m . \quad (1.1.13)$$

Dans les ouvrages spécialisés on utilise parfois (pour abréger l'écriture) la représentation des relations (1.1.10) à (1.1.13) sous la forme vectorielle suivante:

$$\mathbf{P} = \alpha : \mathbf{E} + \chi : \mathbf{EE} + \theta : \mathbf{EEE} + \dots ; \quad (1.1.10a)$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{l}} = \alpha : \mathbf{E} ; \quad (1.1.11a)$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{q}} = \chi : \mathbf{EE} ; \quad (1.1.12a)$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{c}} = \theta : \mathbf{EEE} . \quad (1.1.13a)$$

Milieux non linéaires quadratiques et cubiques. — Pour les cristaux à centre de symétrie ainsi que pour les liquides et les gaz le tenseur χ est nul. Rappelons que lors d'un changement de coordonnées les composantes de tenseur sont transformées comme des produits de coordonnées correspondantes. Par exemple, χ_{122} est transformé comme le produit xyy, et χ_{223}, comme le produit yyz. Effectuons une opération d'inversion par rapport au centre de symétrie du cristal: $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$. Dans ce cas toutes les composantes du tenseur χ doivent changer de signe (puisque leur correspondent les produits d'un nombre impair de coordonnées): $\chi_{ikj} \to -\chi_{ikj}$. Or, le cristal étant à centre de symétrie, le tenseur χ doit rester inchangé. Par voie de conséquence, $-\chi_{ikj} = \chi_{ikj}$ ou, autrement dit, $\chi_{ikj} = 0$.

Ainsi, dans les cas des cristaux à centre de symétrie, des liquides et des gaz, la polarisation quadratique est nulle à cause de symétrie.

La non-linéarité de ces milieux se détermine donc, dans une analyse au premier ordre, par la susceptibilité cubique, d'où le nom de milieux *non linéaires cubiques* qu'on leur donne. Pour des milieux non linéaires cubiques isotropes l'équation de la mécanique (1.1.10) prend la forme suivante:

$$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E} + \theta E^2\mathbf{E} + \ldots \quad (1.1.14)$$

Si un cristal présente une susceptibilité quadratique, la contribution principale à sa polarisation non linéaire sera apportée par la polarisation quadratique. C'est pourquoi les cristaux à susceptibilité quadratique sont rangés dans la catégorie de milieux *non linéaires quadratiques*. Sur les 32 classes cristallines, 20 sont à susceptibilité quadratique [1] (voir Tableau 1.1).

Tableau 1.1

Cristaux	Systèmes	Classes cristallines (désignations d'après Schönflies)				
Biaxiaux	Triclinique	C_1				
	Monoclinique	C_s	C_2			
	Rhombique	C_{2v}	D_2			
Uniaxiaux	Trigonal	C_3	C_{3v}	D_3		
	Hexagonal	C_6	C_{6v}	D_6	C_{3h}	D_{3h}
	Tétragonal	C_4	C_{4v}	D_4	D_{2d}	S_4
Optiquement isotropes	Cubique	T	T_d			

Du point de vue de l'optique non linéaire, parmi ces 20 classes il convient de considérer avant tout la classe D_{2d} ($\bar{4}2_m$) dans le système tétragonal [2]. Cette classe comprend les cristaux du groupe de dihydrophosphate de potassium: le phosphate monopotassique KDP (formule chimique KH_2PO_4), le dihydrophosphate d'ammonium ADP ($NH_4H_2PO_4$), le dideutérophosphate de potassium DKDP (KD_2PO_4), le dideutérophosphate d'ammonium DADP ($ND_4D_2PO_4$), le dihydroarséniate de potassium KDA (KH_2AsO_4), le dihydroarsé-

[1] Tous ces cristaux sont des corps piézo-électriques. Pour la symétrie des cristaux piézo-électriques, voir par exemple [5]. Remarquons que l'effet électro-optique Pockels ne se manifeste que dans de tels cristaux (c'est-à-dire dans les cristaux où $\chi \neq 0$).

[2] On indique deux désignations de la classe cristalline: d'après Schönflies et d'après le système international (entre parenthèses).

niate d'ammonium ADA ($NH_4H_2AsO_4$), le dihydrophosphate de rubidium RDP (RbH_2PO_4), le dihydroarséniate de rubidium RDA (RbH_2AsO_4), le dihydroarséniate de césium CDA (CsH_2AsO_4), le dideutéroarséniate de césium DCDA (CsD_2AsO_4). Le thiogallate d'argent ($AgGaS_2$) appartient lui aussi à cette classe cristalline.

Puis il convient de considérer la classe C_{3v} ($3m$) dans le système trigonal: le niobate de lithium ($LiNbO_3$) et la proustite (Ag_3AsS_3); la classe C_6 (6) dans le système hexagonal (l'iodate de lithium $LiIO_3$); la classe C_{4v} ($4\ mm$) dans le système tétragonal (le niobate de potassium-lithium: $K_6Li_4NbO_3$). Il convient également de signaler la classe C_{2v} ($mm\ 2$) dans le système rhombique (les cristaux biaxiaux): le niobate de baryum-sodium ($Ba_2NaNb_5O_{15}$), le pentaborate de potassium ($KB_5O_8\cdot 4H_2O$, cristal KPB), le titanate-phosphate de potassium ($KTiOPO_4$, cristal KTP), le formiate de lithium ($LiCOOH \times \times H_2O$). Au même système appartient la classe D_2 (222) (le cristal d'acide α-iodique α-HIO_3).

Equation d'onde pour un milieu à polarisation non linéaire. — Nous partirons du système d'équations de Maxwell, qui décrit le champ électromagnétique dans un diélectrique non linéaire:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{div}\mathbf{D} = 0; \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0; \\ \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi(\mathbf{P}_l + \mathbf{P}_{nl}); \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}. \end{aligned}\right\} \tag{1.1.15}$$

En appliquant l'opérateur rotationnel à la première équation de ce système et en utilisant les autres équations du système, on obtient

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}_l + 4\pi\mathbf{P}_{nl}).$$

Finalement on est conduit à l'*équation d'onde* pour un diélectrique à polarisation non linéaire:

$$\boxed{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}_l) = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P}_{nl}.} \tag{1.1.16}$$

En tenant compte de (1.1.11), récrivons (1.1.16) sous la forme

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})_i + \frac{1}{c^2}\sum_k (\delta_{ik} + 4\pi\alpha_{ik})\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_k = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_{nl\,i}$$

ou encore

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})_i + \frac{1}{c^2}\sum_k \varepsilon_{ik}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_k = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_{nl\,i}. \tag{1.1.17}$$

Dans le cas d'un milieu isotrope, l'équation (1.1.17) peut être mise sous la forme

$$\boxed{\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{E}+\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}=-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P}_{\mathrm{nl}}.} \tag{1.1.18}$$

§ 1.2. Susceptibilités non linéaires

Dispersion temporelle de la susceptibilité linéaire. — Le processus d'établissement de la polarisation du milieu exige pour sa réalisation un certain temps. Ceci signifie que la réponse du milieu à une action extérieure doit être en retard sur l'action. Plus exactement, la polarisation du milieu à un instant donné doit se déterminer par les valeurs de l'intensité de champ à des instants précédents. Ceci signifie qu'au lieu de (1.1.1) on doit se servir de la relation

$$P_i(t)=\sum_k\int_0^\infty \alpha_{ik}(\tau)\,E_k(t-\tau)\,d\tau, \tag{1.2.1}$$

équation qui prend en considération la *dispersion temporelle* de la susceptibilité diélectrique [1]).

La prise en compte de cette dispersion amène à une variation du tenseur de susceptibilité en fonction de la pulsation ω de l'onde lumineuse. Si l'on utilise dans l'équation de la mécanique les composantes de Fourier des vecteurs **P** et **E**, c'est-à-dire les vecteurs

$$\mathbf{P}(\omega)=\int \mathbf{P}(t)\exp(-i\omega t)\,dt \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\omega)=\int \mathbf{E}(t)\exp(-i\omega t)\,dt,$$

on peut utiliser comme précédemment des équations du type (1.1.1) en y faisant intervenir les composantes $\alpha_{ik}(\omega)$ du tenseur de susceptibilité, dépendant de la pulsation (on les appelle composantes spectrales du tenseur):

$$P_i(\omega)=\sum_k \alpha_{ik}(\omega)\,E_k(\omega), \tag{1.2.2}$$

où

$$\alpha_{ik}(\omega)=\int_0^\infty \alpha_{ik}(\tau)\exp(-i\omega\tau)\,d\tau. \tag{1.2.3}$$

On obtient ce résultat en effectuant la transformation de Fourier sur les premier et second membres de la relation (1.2.1).

Dispersion des susceptibilités non linéaires. — L'expression (1.1.12), valable pour la polarisation quadratique, est remplacée, compte tenu

---

[1]) La dispersion de la susceptibilité diélectrique a été examinée par exemple au § 4.2 de [1]. Pour une analyse détaillée de la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux dispersifs, voir par exemple [6], [7].

de la dispersion, par l'expression suivante:

$$P_{qi}(t)=\sum_k \sum_j \int_0^{\infty}\int \chi_{ikj}(\tau', \tau'') E_k(t-\tau') \times$$
$$\times E_j(t-\tau'-\tau'')\, d\tau'\, d\tau''. \quad (1.2.4)$$

En utilisant (comme dans le cas de la polarisation linéaire) les composantes de Fourier des vecteurs polarisation et intensité de champ, on peut obtenir les relations suivantes:

$$P_{qi}(\omega_1+\omega_2)=\sum_k \sum_j \chi_{ikj}(\omega_1+\omega_2) E_k(\omega_1) E_j(\omega_2); \quad (1.2.5a)$$

$$P_{qi}(\omega_1-\omega_2)=\sum_k \sum_j \chi_{ikj}(\omega_1-\omega_2) E_k(\omega_1) E_j^*(\omega_2), \quad (1.2.5b)$$

où

$$\chi_{ikj}(\omega_1 \pm \omega_2)=$$
$$=\int_0^{\infty}\int \chi_{ikj}(\tau', \tau'') \exp[-i(\omega_1 \pm \omega_2)\tau' \mp i\omega_2\tau'']\, d\tau'\, d\tau''. \quad (1.2.6)$$

Chacune des composantes spectrales du tenseur χ dépend de deux fréquences (ω_1 et ω_2) qui forment une certaine combinaison (la somme $\omega_1 + \omega_2$ ou la différence $\omega_1 - \omega_2$); c'est cette combinaison qui détermine la fréquence de l'onde de polarisation quadratique. Remarquons que l'écriture du type $\chi_{ikj}(\omega_1 \pm \omega_2)$ est une écriture abrégée; en toute rigueur, il faudrait écrire: $\chi_{ikj}(\omega_1 \pm \omega_2; \omega_1, \omega_2)$.

Les composantes spectrales du tenseur θ dépendent de trois fréquences dont la combinaison détermine la fréquence de l'onde de polarisation cubique. Indiquons à titre d'exemple la relation

$$P_{ci}(\omega_1+\omega_2+\omega_3)=$$
$$=\sum_k \sum_j \sum_m \theta_{ikjm}(\omega_1+\omega_2+\omega_3) E_k(\omega_1) E_j(\omega_2) E_m(\omega_3) \quad (1.2.7)$$

Les relations (1.2.5) et (1.2.7) reflètent un fait d'importance fondamentale: la polarisation non linéaire du milieu est liée aux phénomènes d'interaction des ondes lumineuses. L'onde de polarisation quadratique est le résultat de l'interaction de deux ondes lumineuses. De telles interactions sont dites *à trois fréquences*. L'onde de polarisation cubique est le résultat de l'interaction de trois ondes lumineuses (interactions *à quatre fréquences*). En utilisant les interactions des ondes lumineuses en milieu non linéaire, on peut réaliser une conversion de fréquence.

Propriétés de symétrie générales du tenseur de susceptibilité quadratique [6]. — Le tenseur χ est toujours symétrique par rapport

à la permutation de deux derniers indices :

$$\boxed{\chi_{ikj} = \chi_{ijk}.} \tag{1.2.8}$$

Suivant la relation (1.2.8), le nombre de composantes indépendantes du tenseur χ ne doit pas dépasser 18. En réalité, pour beaucoup de structures cristallines ce nombre est nettement plus petit ; il se détermine par la symétrie du cristal. C'est ainsi par exemple que dans le cas des cristaux appartenant au groupe de dihydrophosphate de potassium le tenseur χ ne possède que deux composantes indépendantes :

$$\chi_{123} = \chi_{132} = \chi_{213} = \chi_{231}; \; \chi_{312} = \chi_{321}. \tag{1.2.9}$$

La relation (1.2.8) permet, en considérant le tenseur χ, de passer du système de trois indices (des indices i, j, k dont chacun prend trois valeurs) à celui de deux indices (aux indices i, l, où $i = 1, 2, 3$; $l = 1, 2, \ldots, 6$). L'expression (1.1.12) devient maintenant

$$P_i = \sum_{l=1}^{6} d_{il} F_l \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.2.10}$$

ou encore, en écriture développée,

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} d_{12} d_{13} d_{14} d_{15} d_{16} \\ d_{21} d_{22} d_{23} d_{24} d_{25} d_{26} \\ d_{31} d_{32} d_{33} d_{34} d_{35} d_{36} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{vmatrix}.$$

Ici, $d_{i1} = \chi_{i11}$; $d_{i2} = \chi_{i22}$; $d_{i3} = \chi_{i33}$; $d_{i4} = \chi_{i23} = \chi_{i32}$; $d_{i5} = \chi_{i13} = \chi_{i31}$; $d_{i6} = \chi_{i12} = \chi_{i21}$. Le vecteur F est à six dimensions ; F_1 s'exprime par E_1E_1, F_2, par E_2E_2, F_3, par E_3E_3, F_4, par $(E_2E_3 + E_3E_2)$, F_5, par $(E_1E_3 + E_3E_1)$ et F_6, par $(E_1E_2 + E_2E_1)$.

En faisant usage des égalités (1.2.9), on peut représenter la matrice d_{il} pour les cristaux du groupe de dihydrophosphate de potassium sous la forme

$$(d_{il}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}. \tag{1.2.11}$$

En examinant les différentes composantes spectrales du tenseur χ, on peut établir une relation de symétrie supplémentaire :

$$\chi_{ikj}(\omega_1 + \omega_2) = \chi_{kij}[(\omega_1 + \omega_2) - \omega_1]. \tag{1.2.12}$$

Elle signifie que le tenseur χ est symétrique par rapport à la permutation de deux premiers indices avec une modification simultanée correspondante de la combinaison de fréquences qui détermine la composante spectrale du tenseur. La relation (1.2.12) est appelée relation *de permutation de fréquence*. Pour $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, on déduit de (1.2.12) un résultat important suivant :

$$\chi_{ikj}(2\omega) = \chi_{kij}(2\omega - \omega). \tag{1.2.13}$$

Dans des domaines de fréquences où la dispersion temporelle de la susceptibilité est suffisamment faible, le tenseur χ est symétrique par rapport aux permutations de tous les trois indices. Dans ce cas, les résultats (1.2.8) et (1.2.12) se trouvent en quelque sorte réunis. On obtient finalement des relations connues sous le nom de relations de Kleinman :

$$\chi_{ikj} = \chi_{kij} = \chi_{jki} = \chi_{ijk} = \chi_{kji} = \chi_{jik}. \tag{1.2 14}$$

Propriétés de symétrie générales du tenseur de susceptibilité cubique [6]. — Le tenseur θ est symétrique par rapport aux permutations de trois derniers indices:

$$\boxed{\theta_{ikjm} = \theta_{ikmj} = \theta_{ijkm} = \theta_{ijmk} = \theta_{imkj} = \theta_{imjk}.} \tag{1.2.15}$$

Par raison de cette symétrie le nombre de composantes indépendantes du tenseur θ ne peut pas être supérieur à 30.

Les relations de permutation de fréquence pour le tenseur θ sont de la forme

$$\theta_{ikjm}(\omega_1 + \omega_1 + \omega_2) = \theta_{kijm}(\omega_1 + \omega_1 - (2\omega_1 + \omega_2)) ; \tag{1.2.16a}$$

$$\theta_{ikjm}(\omega_1 + \omega_2 - \omega_1) = \theta_{kijm}(\omega_2 + \omega_1 - \omega_2) ; \tag{1.2.16b}$$

$$\theta_{ikjm}(\omega_1 + \omega_1 - \omega_2) = \theta_{kijm}(\omega_2 - \omega_1 + (2\omega_1 - \omega_2)); \tag{1.2.16c}$$

$$3\theta_{ikjm}(\omega_1 + \omega_1 + \omega_1) = \theta_{kijm}(\omega_1 + \omega_1 - 3\omega_1). \tag{1.2.16d}$$

Dans un diélectrique à faible dispersion temporelle le tenseur θ est symétrique par rapport aux permutations de tous les quatre indices.

Susceptibilités complexes. — La susceptibilité diélectrique d'un milieu dispersif est une grandeur *complexe* [1]). En partant de la relation connue définissant la permittivité complexe

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + i4\pi\sigma/\omega, \tag{1.2.17}$$

représentons la susceptibilité linéaire complexe sous la forme

$$\tilde{\alpha} = \alpha + i\sigma/\omega, \tag{1.2.18}$$

où σ est la conductivité du milieu. La conductibilité du milieu est la cause qui fait apparaître une composante imaginaire dans les expressions donnant la permittivité et la susceptibilité. La composante imaginaire de la susceptibilité linéaire est responsable de l'absorption à un seul photon de la lumière.

Dans le cas général, les susceptibilités non linéaires doivent être considérées, elles aussi, comme des grandeurs complexes: $\tilde{\chi} = \chi +$

---

[1]) En fait, ceci résulte déjà de (1.2.3); voir à ce propos par exemple [7].

$+ i\,\mathrm{Im}\,\tilde{\chi}$, $\tilde{\theta} = \theta + i\,\mathrm{Im}\,\tilde{\theta}, \ldots$ Lés composantes imaginaires des susceptibilités sont beaucoup plus petites que les composantes réelles:

$$\mathrm{Im}\,\tilde{\alpha} \ll \alpha; \quad \mathrm{Im}\,\tilde{\chi} \ll \chi; \quad \mathrm{Im}\,\tilde{\theta} \ll \theta.$$

Pourtant on doit avoir en vue que

$$\mathrm{Im}\,\tilde{\alpha} \sim \chi E; \quad \mathrm{Im}\,\tilde{\chi} \approx \theta E.$$

Ceci signifie que les effets liés à la composante imaginaire de la susceptibilité linéaire sont à proprement parler du même ordre de grandeur que ceux dus à la composante réelle de la susceptibilité quadratique. Ce qui vient d'être dit s'applique également aux effets liés à la composante imaginaire de la susceptibilité quadratique et à ceux dus à la composante réelle de la susceptibilité cubique. Une *règle générale* peut être énoncée: les effets liés à la composante imaginaire de la susceptibilité de n-ième ordre sont du même ordre de grandeur que les effets dus à la composante réelle de la susceptibilité de $(n + 1)$-ième ordre.

Les composantes *réelles* des susceptibilités d'ordres supérieurs sont responsables de la génération des harmoniques optiques supérieurs (v. § 1.4). Les composantes *imaginaires* des susceptibilités d'ordres supérieurs sont responsables de l'absorption multiphoton de la lumière et de l'ionisation multiphoton des atomes et de la dissociation des molécules [8].

§ 1.3. Phénomènes optiques non linéaires

Vecteur d'intensité de champ électrique d'onde lumineuse. — Ecrivons ce vecteur sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{e}\{A(\mathbf{r}, t)\exp[i(\omega t - \mathbf{kr})] + \text{c.c.}\}, \qquad (1.3.1)$$

où $\mathbf{e}$ est le vecteur unitaire de polarisation; $A(\mathbf{r}, t)$, l'amplitude complexe de l'onde lumineuse; c.c., le terme complexe conjugué.

Fait significatif, par rapport au facteur $\exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]$, le facteur $A(\mathbf{r}, t)$ varie *nettement plus lentement* avec la variation des arguments. Ceci signifie que les inégalités

$$\frac{\partial A}{\partial t}\frac{1}{\omega} \ll A; \quad \frac{\partial A}{\partial \mathbf{r}}\frac{1}{\mathbf{k}} \ll A \qquad (1.3.2)$$

sont vérifiées. La fonction $A(\mathbf{r}, t)$ peut être considérée comme constante à des distances de $2\pi/k = \lambda$ et pendant des intervalles de temps égaux à $1/\omega$. Nous supposerons que dans certains cas la fonction A est indépendante du temps et des coordonnées transversales (par rapport à la direction de propagation de l'onde).

Il est à noter tout particulièrement que la relation (1.3.1) fait intervenir un *terme complexe conjugué* qui assure la nature réelle de l'intensité de champ. Le fait est que l'écriture complexe de l'intensité de champ $\mathbf{E} = \mathbf{e}A \exp[i(\omega t - \mathbf{kr})]$ est admissible dans le cadre de la théorie *linéaire* mais ne l'est pas en théorie *non linéaire*. Dans le cas des équations linéaires, Re **E** et Im **E** peuvent être considérées séparément l'une de l'autre. Si, par contre, les équations font intervenir des termes non linéaires du type E^2, E^3, etc., les parties Re **E** et Im **E** deviennent interdépendantes. C'est pourquoi dans la théorie non linéaire on doit utiliser dès le début l'intensité réelle du champ.

Phénomènes liés à la composante réelle de la susceptibilité quadratique. — Bien qu'étant très variés, les *phénomènes optiques non linéaires* ont pour origine commune le fait qu'ils sont dus à la polarisation non linéaire du milieu (aux composantes réelles et imaginaires des susceptibilités non linéaires) [1], [6], [8]. Proposons-nous d'étudier les phénomènes liés à la composante réelle des susceptibilités quadratique et cubique.

Supposons qu'une onde lumineuse de pulsation ω entre dans un diélectrique non linéaire quadratique. Représentons l'intensité de champ de cette onde sous la forme (1.3.1). Introduisant (1.3.1) dans l'expression (1.1.12a) pour la polarisation quadratique du milieu (en utilisant la forme vectorielle de la représentation), on obtient

$$\mathbf{P}_q = \frac{1}{4}\chi : \mathbf{ee}\,\{A\exp[i(\omega t - \mathbf{kr})] + \text{c.c.}\}^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\chi : \mathbf{ee}\,\{A\exp[i(2\omega t - 2\mathbf{kr})] +$$
$$+ A^{*2}\exp[i(2\mathbf{kr} - 2\omega t)] + 2AA^*\}. \qquad (1.3.3)$$

Les deux premiers termes de (1.3.3) décrivent l'onde de polarisation de pulsation 2ω, alors que le troisième terme est lié à l'effet de redressement optique. L'onde de polarisation de pulsation 2ω peut conduire (dans des conditions bien déterminées) à la réémission à cette fréquence, c'est-à-dire à l'apparition dans le milieu d'une onde de pulsation 2ω qui est le *deuxième harmonique optique.*

Deux ondes lumineuses, de pulsations ω et 2ω, se propagent maintenant à l'intérieur du diélectrique. L'interaction entre ces ondes peut conduire en principe à la réémission de pulsations somme (3ω) et différence (ω). Pour s'en assurer il suffit d'examiner le champ produit par deux ondes de pulsations différentes (ω_1 et ω_2):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\{\mathbf{e}_1A_1\exp[i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1\mathbf{r})] +$$
$$+ \mathbf{e}_2A_2\exp[i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2\mathbf{r})] + \text{c.c.}\}. \qquad (1.3.4)$$

Introduisant l'expression (1.3.4) dans (1.1.12a), on obtient l'expression suivante pour la polarisation quadratique:

$$\mathbf{P}_q = \frac{1}{4}\chi : \{\mathbf{e}_1 A_1 \exp[i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1\mathbf{r})] + \\ + \mathbf{e}_2 A_2 \exp[i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2\mathbf{r})] + \text{c.c.}\}^2 = \\ = \frac{1}{4}\chi : \{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 A_1^2 \exp[i(2\omega_1 t - 2\mathbf{k}_1\mathbf{r})] + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 A_2^2 \exp[i(2\omega_2 t - 2\mathbf{k}_2\mathbf{r})] + \text{c.c.}\} + \\ + \frac{1}{2}\chi : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \{A_1 A_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2)t - i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{r}] + \\ + A_1 A_2^* \exp[i(\omega_1 - \omega_2)t - i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}] + \text{c.c.}\} + \\ + \frac{1}{2}\chi : (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 A_1 A_1^* + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 A_2 A_2^*). \quad (1.3.5)$$

En plus des ondes de polarisation de pulsations $2\omega_1$ et $2\omega_2$, l'expression (1.3.5) fait intervenir des ondes de polarisation de pulsations $\omega_1 + \omega_2$ et $\omega_1 - \omega_2$:

$$\mathbf{P}_q^{(1)} = \frac{1}{2}\chi : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \{A_1 A_2 \exp[i(\omega_1 + \omega_2)t - i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{r}] + \text{c.c.}\}; \quad (1.3.6a)$$

$$\mathbf{P}_q^{(2)} = \frac{1}{2}\chi : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \{A_1 A_2^* \exp[i(\omega_1 - \omega_2)t - i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}] + \text{c.c.}\}. \quad (1.3.6b)$$

Remarquons que l'image de Fourier du vecteur $\mathbf{P}_q^{(1)}$ s'exprime par la composante fréquentielle $\chi(\omega_1 + \omega_2)$ du tenseur de susceptibilité quadratique, et l'image de Fourier du vecteur $\mathbf{P}_q^{(2)}$ par la composante fréquentielle $\chi(\omega_1 - \omega_2)$.

Il est facile de voir ainsi qu'un milieu non linéaire quadratique possède en principe l'aptitude à *enrichir* le spectre d'ondes lumineuses se propageant dans ce milieu. L'interaction de deux ondes de pulsation fondamentale ω peut faire naître une onde réémise de pulsation 2ω (phénomène de *génération de deuxième harmonique optique*), alors l'onde initiale et l'onde réémise interagissant entre elles peuvent créer des ondes réémises « secondaires » de pulsations 2ω, 4ω (phénomène de *génération de quatrième harmonique*), 3ω (*génération de troisième harmonique*) [1]), ω (*auto-action* de l'onde lumineuse de départ); v. fig. 1.1. Cette figure représente un processus *à deux cascades*: d'abord il y a interaction de deux ondes de pulsation ω, et ensuite, l'onde de pulsation ω interagit avec l'onde réémise de pulsation 2ω. En principe, les ondes réémises secondaires peuvent interagir les unes avec les autres (troisième cascade), et ainsi de suite.

[1]) La génération de troisième harmonique dans un milieu non linéaire quadratique, qui s'effectue grâce à la réémission de pulsation égale à la somme de celles de l'onde lumineuse de départ et du deuxième harmonique, est appelée génération de troisième harmonique sur une non-linéarité quasi cubique (ou cubique par cascade).

Phénomènes liés à la composante réelle de la susceptibilité cubique. — Supposons qu'une onde lumineuse initiale de pulsation ω pénètre dans un diélectrique à non-linéarité cubique. Introduisant l'expression (1.3.1) dans (1.1.13a), on obtient l'expression suivante pour l'onde de polarisation cubique du milieu:

$$\mathbf{P}_c = \frac{1}{8}\theta : \mathbf{eee}\{\mathbf{A}\exp[i(\omega t-\mathbf{kr})]+\text{c.c.}\}^3 =$$
$$=\frac{1}{8}\theta : \mathbf{eee}\{A^3\exp[i(3\omega t-3\mathbf{kr})]+3A^2A^*\exp[i(\omega t-\mathbf{kr})]+\text{c.c.}\}. \quad (1.3.7)$$

Comme le montre l'expression (1.3.7), le milieu non linéaire cubique peut en principe être le siège de la réémission de pulsations 3ω

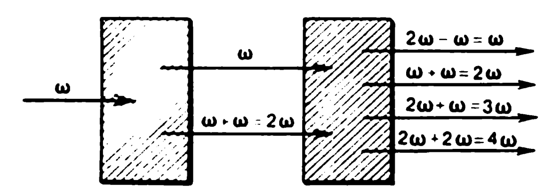


Fig. 1.1

(*génération de troisième harmonique*) et ω (*auto-action de l'onde lumineuse*). En interagissant entre elles, ces ondes peuvent à leur tour donner lieu à la réémission d'ondes de pulsations supplémentaires et le nombre de telles pulsations est plus grand dans le cas de la non-linéarité cubique que dans celui de la non-linéarité quadratique.

Pour trouver ces pulsations, introduisons l'expression (1.3.4) dans (1.1.13a). On obtient finalement l'expression suivante pour la polarisation cubique:

$$\mathbf{P}_c = \frac{1}{8}\theta : \{\mathbf{e}_1A_1\exp[i(\omega_1t-\mathbf{k}_1\mathbf{r})]+\mathbf{e}_2A_2\exp[i(\omega_2t-\mathbf{k}_2\mathbf{r})]+\text{c.c.}\}^3 =$$
$$=\frac{1}{8}\theta : \{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1A_1^3\exp[i(3\omega_1t-3\mathbf{k}_1\mathbf{r})]+$$
$$+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2A_2^3\exp[i(3\omega_2t-3\mathbf{k}_2\mathbf{r})]+\text{c.c.}\}+$$
$$+\frac{3}{8}\theta : \{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2A_1^2A_2\exp[i(2\omega_1+\omega_2)t-i(2\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{r}]+$$
$$+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2A_1A_2^2\exp[i(\omega_1+2\omega_2)t-i(\mathbf{k}_1+2\mathbf{k}_2)\mathbf{r}]+$$
$$+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2A_1^2A_2^*\exp[i(2\omega_1-\omega_2)t-i(2\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\mathbf{r}]+$$
$$+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2A_1^*A_2^2\exp[i(2\omega_2-\omega_1)t-i(2\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\mathbf{r}]+$$
$$+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1A_1^2A_1^*\exp[i(2\omega_1-\omega_1)t-i\mathbf{k}_1\mathbf{r}]+$$

$$+ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 A_2^2 A_2^* \exp [i (2\omega_2 - \omega_2) t - i\mathbf{k}_2\mathbf{r}] + \text{c.c.}\} +$$
$$+ \frac{3}{4} \theta : \{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 A_1 A_1^* A_2 \exp [i (\omega_1 - \omega_1 + \omega_2) t - i\mathbf{k}_2\mathbf{r}] +$$
$$+ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 A_1 A_2 A_2^* \exp [i (\omega_1 + \omega_2 - \omega_2) t - i\mathbf{k}_1\mathbf{r}] + \text{c.c.}\}. \quad (1.3.8)$$

On voit que cette expression de la polarisation cubique comprend les ondes de polarisation de pulsations $3\omega_1$, $3\omega_2$, $2\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 + 2\omega_2$, $2\omega_1 - \omega_2$, $2\omega_2 - \omega_1$, ainsi que de pulsations ω_1 et ω_2. Il y a deux ondes de polarisation de pulsation ω_1 : à l'une d'elles correspond la combinaison $2\omega_1 - \omega_1$, et à l'autre, la combinaison $\omega_1 + \omega_2 - \omega_2$. Il en est de même pour la pulsation ω_2 : les combinaisons $2\omega_2 - \omega_2$ et $\omega_1 - \omega_1 + \omega_2$. Chacune des ondes de polarisation peut réémettre une onde lumineuse de pulsation correspondante.

L'expression (1.3.8) fait intervenir dix termes (dix vecteurs de polarisation). L'image de Fourier de chacun de ces vecteurs s'exprime par la composante fréquentielle correspondante du tenseur de susceptibilité cubique. Enumérons ces composantes fréquentielles en suivant l'ordre de succession des vecteurs de polarisation dans (1.3.8) :

$$\theta(\omega_1 + \omega_1 + \omega_1), \quad \theta(\omega_2 + \omega_2 + \omega_2),$$
$$\theta(\omega_1 + \omega_1 + \omega_2), \quad \theta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_2),$$
$$\theta(\omega_1 + \omega_1 - \omega_2), \quad \theta(\omega_2 + \omega_2 - \omega_1),$$
$$\theta(\omega_1 + \omega_1 - \omega_1), \quad \theta(\omega_2 + \omega_2 - \omega_2),$$
$$\theta(\omega_1 - \omega_1 + \omega_2), \quad \theta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_2).$$

En posant dans (1.3.8) $\omega_1 = \omega$ et $\omega_2 = 3\omega$, nous pouvons conclure que l'interaction entre l'onde lumineuse initiale et le troisième harmonique dans un milieu non linéaire cubique peut provoquer la réémission des ondes lumineuses de pulsations ω, 3ω, 5ω, 7ω, 9ω.

On se rend immédiatement compte que les possibilités d'enrichissement du spectre de fréquences des ondes sont plus grandes dans un milieu non linéaire cubique que dans celui à non-linéarité quadratique, ce qui est illustré par la fig. 1.2.

Auto-action de l'onde lumineuse. — Si, dans un milieu non linéaire, il se produit le rerayonnement de l'onde lumineuse de pulsation fondamentale ω, on dit qu'il y a *auto-action* de l'onde lumineuse. L'auto-action peut se manifester par l'autofocalisation de l'onde, par sa défocalisation, par la dérive de la direction de synchronisme dans le cristal et par certains autres phénomènes. L'auto-action est liée à la variation de la permittivité (de l'indice de réfraction) du milieu par suite de la polarisation non linéaire induite par le champ d'onde lumineuse.

Considérons un milieu isotrope à non-linéarité cubique. D'après l'expression (1.3.7), dans ce milieu prend naissance une onde de polarisation non linéaire

$$P_\omega = \frac{3}{8}\,\theta A^3\,[\exp(i\omega t - i\mathbf{kr}) + \text{c.c.}] = \frac{3}{4}\,\theta A^3 \cos(\omega t - \mathbf{kr}) \qquad (1.3.9)$$

(A est supposé réel). En utilisant les expressions (1.1.4), (1.1.14), (1.3.9) et les relations $D = D(\omega)\cos(\omega t - \mathbf{kr})$ et $E = A\cos(\omega t -$

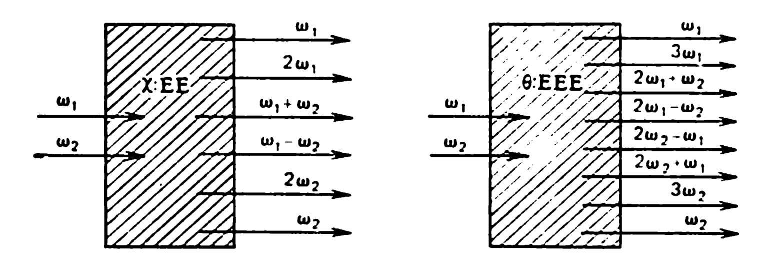


Fig. 1.2

$- \mathbf{kr})$, on obtient $D(\omega) = A + 4\pi\alpha(\omega)A + 3\pi\theta(\omega + \omega - \omega)A^3$. Comme $\varepsilon(\omega) = D(\omega)/A$, on a

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\alpha(\omega) + 3\pi\theta(\omega + \omega - \omega)A^2. \qquad (1.3.10)$$

Il résulte de (1.3.10) que lorsqu'un milieu non linéaire cubique est traversé par une onde lumineuse d'amplitude A, la permittivité de ce milieu varie d'une quantité égale à $3\pi\theta(\omega + \omega - \omega)A^2$.

Les auto-actions des ondes lumineuses caractérisent surtout les milieux non linéaires cubiques. Mais, comme nous l'avons vu plus haut, les auto-actions peuvent également être observées dans les milieux non linéaires quadratiques par suite de la réémission de l'onde dont la pulsation est égale à la différence entre la pulsation du deuxième harmonique et celle de l'onde fondamentale.

§ 1.4. Synchronisme de phase (d'onde)

Pour réaliser l'aptitude d'un milieu non linéaire à réémettre une onde de pulsation déterminée (par exemple, de pulsation du deuxième harmonique) il est nécessaire d'accomplir une condition appelée condition de *synchronisme d'onde* ou *de phase.*

Remarques préliminaires. — Les ondes lumineuses de différentes pulsations se propagent dans un milieu dispersif avec des vitesses différentes. Représentons, d'une manière simplifiée, l'onde fondamentale (onde initiale) sous la forme

$$E_\omega = \frac{1}{2}\,A_\omega\,\{\exp[i(\omega t - kz)] + \text{c.c.}\} = A_\omega \cos(\omega t - kz), \qquad (1.4.1)$$

et l'onde de deuxième harmonique, sous la forme

$$E_{2\omega}=\frac{1}{2}A_{2\omega}\{\exp[i(2\omega t-Kz)]+\text{c.c.}\}=A_{2\omega}\cos(2\omega t-Kz) \quad (1.4.2)$$

(le problème est unidimensionnel; les deux ondes se propagent suivant l'axe des z et possèdent une même polarisation). Soient $n(\omega)=\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ et $n(2\omega)=\sqrt{\varepsilon(2\omega)}$ les indices de réfraction du milieu pour des pulsations correspondantes. Les vitesses de propagation de l'onde fondamentale et du deuxième harmonique ont pour valeurs respectives

$$v=c/n(\omega)=\omega/k;\ V=c/n(2\omega)=2\omega/K. \quad (1.4.3)$$

Par suite de la dispersion de l'indice de réfraction on a $n(\omega)\neq n(2\omega)$, ce qui signifie que $v\neq V$. De (1.4.3) il résulte également que la différence

$$K-2k=\Delta k, \quad (1.4.4)$$

appelée *désaccord d'onde*, n'est pas nulle.

Nature interférentielle du synchronisme de phase; courbe de synchronisme. — Soit une onde lumineuse de pulsation ω se propageant à la vitesse v dans un milieu non linéaire quadratique. Cette onde induira dans le milieu des moments dipolaires locaux, ce qui signifie qu'une onde de pulsation 2ω de polarisation quadratique se propagera dans le milieu à la même vitesse v:

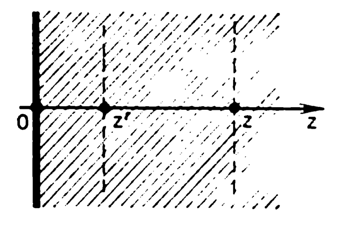


Fig. 1.3

$$P_{2\omega}=\frac{1}{4}\chi:\mathbf{ee}A_{\omega}^{2}\{\exp[i(2\omega t-2kz)]+\text{c.c.}\}=$$
$$=\frac{1}{2}\chi:\mathbf{ee}A_{\omega}^{2}\cos(2\omega t-2kz). \quad (1.4.5)$$

Les dipôles locaux qui prennent naissance lors de la propagation de l'onde de polarisation assurent le rerayonnement de l'onde de pulsation 2ω (pulsation de l'onde de polarisation). Les ondes lumineuses rerayonnées aux différents points du milieu se propagent le long de l'axe des z et *interfèrent* les unes avec les autres. L'interférence de ces ondes peut en principe conduire à la formation de l'onde de deuxième harmonique, autrement dit, à une *accumulation spatiale* de l'effet non linéaire.

Orientons l'axe des z perpendiculairement à la frontière du milieu non linéaire quadratique; $z=0$ correspond à la frontière du milieu (fig. 1.3). Supposons que dans ce milieu se propage le long de l'axe des z une onde plane de polarisation quadratique (de pulsation 2ω et de vitesse $v=\omega/k$) et que la phase de cette onde en un certain

point z' s'exprime par

$$\Phi (z') = 2\omega t - 2kz'. \quad (1.4.6)$$

Considérée au point z, la phase de l'onde lumineuse formée au point z' sera différente de $\Phi (z')$ d'une quantité $K (z - z')$. Autrement dit, la phase de l'onde lumineuse réémise au point z', considérée au point z, peut être représentée sous la forme

$$\varphi (z') = 2\omega t - 2kz' - K (z - z') = 2\omega t - Kz + \Delta kz'. \quad (1.4.7)$$

L'onde résultante du deuxième harmonique considérée à la distance z de la frontière du milieu est due à l'interférence des ondes réémises aux différents points z' dans l'intervalle de $z' = 0$ à $z' = z$:

$$E_{2\omega} = A \int_0^z \cos \varphi (z')\, dz' = A \int_0^z \cos (2\omega t - Kz + \Delta kz')\, dz', \quad (1.4.8)$$

où A est un certain facteur qui ne dépend ni de z, ni de Δk. Introduisons les notations suivantes:

$$2\omega t - Kz \equiv \mu, \quad \mu + \Delta kz' \equiv w; \quad dz' = dw/\Delta k.$$

Alors,

$$E_{2\omega} = \frac{A}{\Delta k} \int_{\mu}^{\mu+\Delta kz} \cos w\, dw = \frac{A [\sin (\mu + \Delta kz) - \sin \mu]}{\Delta k} =$$

$$= \frac{2A}{\Delta k} \sin \frac{\Delta kz}{2} \cos \left(\mu + \frac{\Delta kz}{2}\right) =$$

$$= \frac{2A}{\Delta k} \sin \frac{\Delta kz}{2} \cos \left(2\omega t - Kz + \frac{\Delta kz}{2}\right). \quad (1.4.9)$$

A partir de l'expression (1.4.9) on trouve pour l'amplitude du deuxième harmonique au point z:

$$\boxed{A_{2\omega} (z) = (2A/\Delta k) \sin (\Delta kz/2).} \quad (1.4.10)$$

La fig. 1.4 montre pour une valeur fixée de z la courbe traduisant la variation de $A_{2\omega}^2$ en fonction de Δk définie par la relation (1.4.10). Cette courbe, dite *de synchronisme*, est une courbe d'interférence typique. L'effet d'interférence positif maximal (l'intensité maximale du deuxième harmonique) a lieu lorsqu'est accomplie la condition

$$\boxed{\Delta k = 0 \text{ ou, autrement, } K = 2k} \quad (1.4.11)$$

qui s'appelle *condition de synchronisme de phase* ou *d'onde*.

La condition de synchronisme de phase est la nullité du désaccord d'onde. Dans le cas considéré elle est équivalente à l'*égalité des vitesses de phase* de l'onde du deuxième harmonique et de l'onde

de polarisation quadratique. De ce qui précède on peut conclure que la condition de synchronisme de phase n'est rien d'autre que la condition assurant l'effet le plus favorable d'interférence des ondes lumineuses rerayonnées aux différents points d'un milieu non linéaire.

Longueur de cohérence. — Revenons à la relation (1.4.10) et examinons la variation de $A_{2\omega}$ en fonction de z pour $\Delta k = 0$ et pour

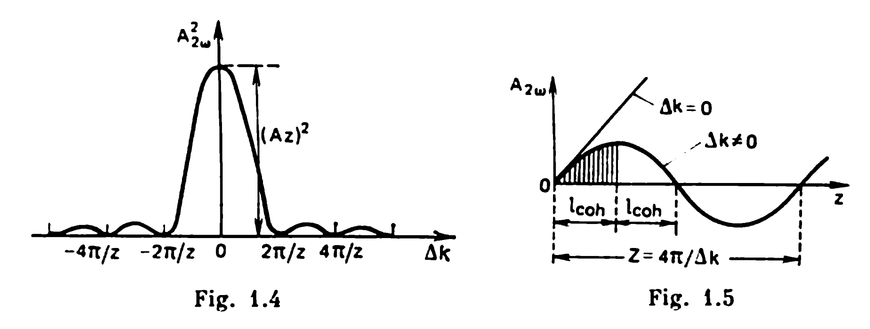


Fig. 1.4 Fig. 1.5

$\Delta k \neq 0$. Comme il s'ensuit de cette relation, lorsqu'il y a synchronisme ($\Delta k = 0$), l'amplitude du deuxième harmonique *croît linéairement* avec la distance z parcourue par le rayonnement dans le milieu non linéaire: $A_{2\omega} = Az$. Lorsqu'il y a un désaccord d'ondes ($\Delta k \neq 0$), l'amplitude du deuxième harmonique *varie périodiquement* avec la distance z. La période de cette variation est égale à

$$Z = 4\pi/\Delta k. \quad (1.4.12)$$

Ce qui vient d'être dit est illustré par la fig. 1.5.

L'amplitude du deuxième harmonique atteint sa valeur maximale lorsque la longueur du cristal non linéaire est égale à

$$l_{coh} = \pi/\Delta k. \quad (1.4.13)$$

Sur la même longueur l'amplitude de l'harmonique décroît de sa valeur maximale jusqu'à zéro. La quantité l_{coh} est appelée *longueur de cohérence*. Supposons que la longueur du cristal est beaucoup de fois plus grande que la longueur de cohérence (cette dernière ne peut être que de l'ordre de 10 μm). En se servant de la fig. 1.5, on peut décrire de la façon suivante les processus qui se déroulent dans le cristal. Sur la *première* (ainsi que sur la troisième, la cinquième, etc.) longueur de cohérence il se produit une *accumulation* de l'effet: l'énergie est transférée de l'onde fondamentale à l'onde du deuxième harmonique (processus de génération de pulsation *somme*: $\omega + \omega \rightarrow 2\omega$). Sur la *deuxième* (ainsi que sur la quatrième, la sixième, etc.) longueur de cohérence il se produit au contraire une « *résorption* » de l'effet: l'énergie est transmise du deuxième harmoni-

que à l'onde fondamentale (processus de génération de la pulsation *différence*: $2\omega - \omega \rightarrow \omega$).

La fig. 1.6 montre une courbe expérimentale de variation de l'intensité du deuxième harmonique du rayonnement d'un laser à rubis en fonction de l'angle α que la direction de rayonnement fait avec la perpendiculaire à une mince plaquette de quartz (de 0,75 mm d'épaisseur) qui joue le rôle d'un échantillon non linéaire. Une variation de l'angle α s'accompagne d'une variation de la longueur du

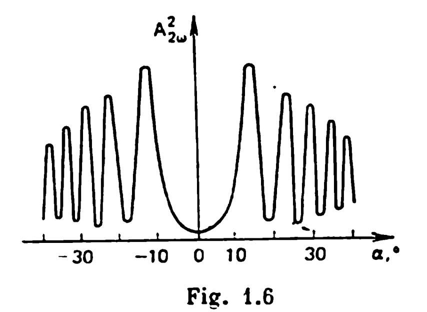


Fig. 1.6

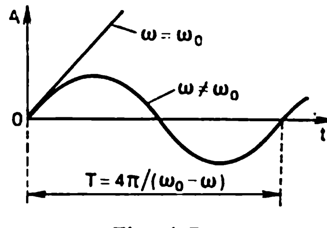


Fig. 1.7

trajet de rayonnement dans le quartz si bien qu'on observe des pulsations bien nettes de l'intensité du deuxième harmonique. La longueur de cohérence était dans ce cas égale à 7μm.

Résonance et battements d'un système oscillant. — Pour un instant, laissons de côté les phénomènes optiques non linéaires et reportons-nous à un problème de la théorie des oscillations. On sait que les oscillations propres d'un système quelconque (par exemple, d'un circuit oscillant radioélectrique) se décrivent par une équation de la forme

$$d^2s/dt^2 + \omega_0^2 s = 0 \tag{1.4.14}$$

où ω_0 est la pulsation des oscillations propres. Supposons qu'il existe une force excitatrice harmonique de pulsation ω. Dans ce cas l'équation (1.4.14) est remplacée par l'équation suivante:

$$d^2s/dt^2 + \omega_0^2 s = F \cos \omega t \tag{1.4.15}$$

Supposons qu'à l'instant initial les oscillations du système sont nulles ($s = 0$, $ds/dt = 0$ à $t = 0$). Quelle sera la variation dans le temps de l'amplitude des oscillations décrites par l'équation (1.4.15)?

Dans le cas considéré, la solution de l'équation (1.4.15) peut être représentée sous la forme:

$$s(t) = \frac{F}{\omega + \omega_0} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega) t/2]}{(\omega_0 - \omega)/2} \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t\right) \tag{1.4.16}$$

A la *résonance*, c'est-à-dire pour

$$\omega = \omega_0 \tag{1.4.17}$$

on en tire

$$s(t) = (Ft/2\omega_0) \sin \omega_0 t.$$

Ainsi, l'amplitude des oscillations croît linéairement avec le temps:

$$A(t) = Ft/2\omega_0. \qquad (1.4.18)$$

En l'absence de résonance, dans le cas où les valeurs de ω et ω_0 sont voisines, la relation (1.4.16) décrit des oscillations de pulsation $(\omega_0 + \omega)/2$ dont l'amplitude varie périodiquement à la fréquence $(\omega_0 - \omega)/2$ (effet de *battements*):

$$A(t) = 2F \sin [(\omega_0 - \omega) t/2]/(\omega_0^2 - \omega^2). \qquad (1.4.19)$$

Ce qui vient d'être dit est illustré par la fig. 1.7.

Synchronisme de phase considéré comme une résonance spatiale. — La ressemblance des fig. 1.7 et 1.5 est bien expressive. Il est vrai que dans la fig. 1.7 on considère le temps, et dans la fig. 1.5, une coordonnée spatiale. Il se trouve que cette similitude n'est pas un effet du hasard et qu'entre la *condition de résonance* (1.4.17) et la *condition de synchronisme de phase* (1.4.11) il existe une analogie physique profonde.

Revenons à ce propos à l'équation d'onde pour un diélectrique non linéaire isotrope [v. (1.1.18)]

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P}_{nl} \qquad (1.4.20)$$

Dans un milieu linéaire $\mathbf{P}_{nl} = 0$ si bien qu'au lieu de (1.4.20) on aura

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = 0. \qquad (1.4.21)$$

Il y a une analogie entre les équations (1.4.14) et (1.4.21) ainsi qu'entre les équations (1.4.15) et (1.4.20).

La première paire d'équations indiquées décrit les processus oscillatoires ou ondulatoires *propres*, c'est-à-dire des processus qui se déroulent dans un système non soumis aux actions extérieures. L'équation (1.4.14) décrit les oscillations propres de pulsation ω_0 du système. L'équation (1.4.21) décrit des ondes propres (libres) se propageant dans le système. Par ces dernières nous entendrons des ondes dont la valeur du vecteur d'onde est déterminée uniquement par la pulsation ω et par les caractéristiques de dispersion du milieu:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon(\omega)}/c \qquad (1.4.22)$$

De tels vecteurs d'onde seront appelés vecteurs *propres*.

La seconde paire d'équations [les équations (1.4.15) et (1.4.20)] décrit les processus oscillatoires ou ondulatoires *forcés*. Dans l'équation (1.4.20), le rôle de la force excitatrice est joué par le terme $(-4\pi/c^2)\,\partial^2\mathbf{P}_{nl}/\partial t^2$. Cette « force élastique » (onde de polarisation

non linéaire) est caractérisée par un vecteur d'onde *d'excitation*, ce vecteur n'obéit pas à la relation (1.4.22). Ainsi, le vecteur d'onde propre de pulsation 2ω (le vecteur d'onde du deuxième harmonique) est égal à $K = 2\omega\sqrt{\varepsilon(2\omega)}/c$, alors que le vecteur d'onde d'excitation de cette pulsation (le vecteur d'onde de polarisation quadratique) est $k' = 2\omega\sqrt{\varepsilon(\omega)}/c$.

Lorsque la pulsation d'excitation est égale à la pulsation propre, on dit que le système oscillant est en résonance. Si le vecteur d'onde d'excitation est égal au vecteur d'onde propre (pour une pulsation donnée), il y a aussi résonance. Plus exactement, c'est une résonance *spatiale*. Dans le cas où la résonance ordinaire (temporelle) est troublée, le système est le siège des battements indiqués sur la fig. 1.7. De même, lorsque la résonance spatiale est perturbée, il y a des *battements spatiaux* montrés sur la fig. 1.5.

Ainsi, la condition de synchronisme de phase est celle de résonance spatiale. Dans le cas général, cette condition doit s'écrire sous la forme

$$\boxed{\mathbf{K} = \mathbf{k}',} \tag{1.4.23}$$

où $\mathbf{K}$ est le vecteur d'onde propre de l'onde lumineuse réémise résultante (par exemple, de l'onde du deuxième harmonique) et $\mathbf{k}'$, le vecteur d'onde d'excitation de pulsation égale à celle de l'onde réémise (par exemple, le vecteur d'onde de l'onde de polarisation quadratique).

Fait important, le vecteur d'onde d'excitation $\mathbf{k}'$ est la somme vectorielle des vecteurs d'onde propres $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$ des ondes interagissantes (par exemple, de deux ondes de pulsation ω) :

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \tag{1.4.24}$$

En réunissant (1.4.23) et (1.4.24), on peut écrire la condition de synchronisme de phase sous la forme

$$\boxed{\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2.} \tag{1.4.25}$$

Dans le cas des vecteurs colinéaires, la condition (1.4.25) se ramène, pour la génération de deuxième harmonique, à la condition (1.4.11).

On rencontre parfois cette affirmation que la condition de synchronisme (1.4.25) traduit la loi de conservation de l'impulsion des photons. Il est aisé de voir qu'une telle affirmation n'est pas correcte, car il s'ensuit la conclusion qu'en cas d'un désaccord d'onde cette loi de conservation de l'impulsion ne doit pas être observée. Le fait est qu'à la loi de conservation de l'impulsion des photons correspond l'égalité (1.4.24) qui n'a rien à voir, de par elle-même, avec la condition de synchronisme de phase. Cette égalité est vérifiée dans tous les cas, alors que l'égalité (1.4.23) et donc (1.4.25) ne l'est qu'en l'absence de désaccord d'onde.

Bibliographie

1. **Tarassov L.** Bases physiques de l'électronique quantique (domaine optique). — Editions Mir, Moscou, 1979.
2. **Ландсберг Г. С.** Оптика. — М.: Наука, 1976.
3. **Мустель Е. Р., Парыгин В. Н.** Методы модуляции и сканирования света. — М.: Наука, 1970.
4. **Синг С.** Нелинейные оптические материалы. — В кн.: Справочник по лазерам в 2-х т./Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Сов. радио, 1978. — Т. 2, с. 237-271. **Мейснер Л. Б., Салтиел С. М.** Нелинейные восприимчивости. — Там же, с. 271-292.
5. **Landau L., Lifchitz E.** Electrodynamique des milieux continus. — Editions Mir, Moscou, 1969.
6. **Ахманов С. А., Хохлов Р. В.** Проблемы нелинейной оптики (электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах). — М.: ВИНИТИ, 1965.
7. **Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.** Теория волн. — М.: Наука, 1979.
8. **Bloembergen N.** (Ed). Non linear Spectroscopy. — Bologne, 1977.

CHAPITRE 2

GÉNÉRATION DE DEUXIÈME HARMONIQUE

§ 2.1. Synchronisme de phase dans le cas de la génération de deuxième harmonique

Eléments d'optique des cristaux uniaxiaux [1]. — On sait que la propagation de la lumière à l'intérieur d'un milieu optiquement anisotrope présente certaines particularités. Dans une direction choisie, deux ondes polarisées rectilignement se propagent dans le milieu. Ces ondes ont une même pulsation et des vitesses différentes (indices de réfraction différents), leurs vecteurs de polarisation sont perpendiculaires l'un à l'autre. A l'existence de deux ondes lumineuses dans le cristal est lié le phénomène de *biréfringence*. A chacune des ondes correspond sa surface de valeurs de l'indice de réfraction (indicatrice d'indice de réfraction) qui montre clairement comment, pour une onde donnée, l'indice de réfraction dépend de la direction du vecteur d'onde. Dans les cristaux *uniaxiaux*, l'une des indicatrices d'indice de réfraction est une sphère et l'autre un ellipsoïde de révolution autour de l'axe optique du cristal. La première indicatrice correspond à l'onde lumineuse *ordinaire*; son indice de réfraction ne dépend pas de la direction du vecteur d'onde. La seconde indicatrice correspond à l'onde *extraordinaire*; son indice de réfraction dépend de l'angle θ que le vecteur d'onde fait avec l'axe optique du cristal. Le vecteur **E** de l'onde ordinaire est perpendiculaire au plan de l'angle θ; le vecteur **E** de l'onde extraordinaire se situe dans ce plan.

La fig. 2.1 montre les coupes des indicatrices d'indice de réfraction par un plan passant par l'axe optique: *a*) dans un cristal uniaxial négatif, *b*) dans un cristal uniaxial positif. Un cristal est caractérisé par deux paramètres dépendant de la fréquence, qui sont les *valeurs principales* de l'indice de réfraction n_0 et n_e et dont le sens est facile à saisir en examinant la figure. Le paramètre n_0 détermine la vitesse de l'onde ordinaire dans toute direction ($v_0 = c/n_0$). Le paramètre n_e détermine la vitesse de l'onde extraordinaire dans une direction perpendiculaire à l'axe optique. Dans la direction de l'axe optique, les vitesses des deux ondes sont identiques. Si $n_e <$

[1]) Pour la propagation des ondes lumineuses dans les milieux anisotropes, en particulier, dans les cristaux uniaxiaux, voir par exemple § 4.3 de [1], ainsi que [2] et [3].

$< n_0$, le cristal uniaxial est *négatif*, et si $n_e > n_0$, il est *positif*. Les cristaux uniaxiaux utilisés en optique non linéaire étant en règle générale négatifs, on se borne dans ce qui suit à examiner ces derniers.

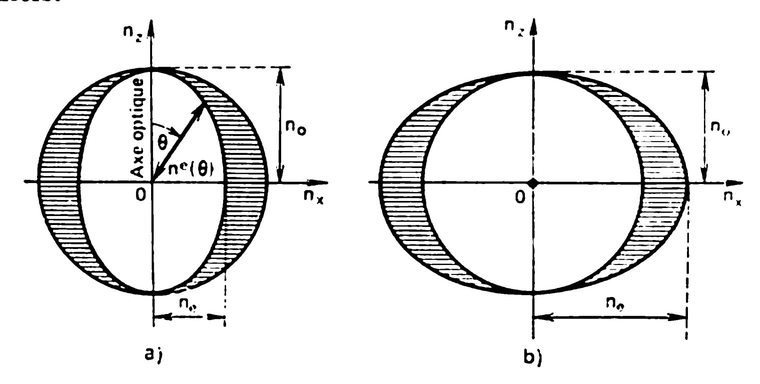


Fig. 2.1

La dépendance de l'indice de réfraction n^e de l'onde extraordinaire [1]) vis-à-vis de l'angle θ se déduit de l'équation de l'ellipse

$$(n_z^2/n_o^2) + (n_x^2/n_e^2) = 1.$$

Mettons cette équation sous la forme

$$[(n^e)^2 \cos^2\theta/n_o^2] + [(n^e)^2 \sin^2\theta/n_e^2] = 1 \qquad (2.1.1)$$

(v. fig. 2.1, *a*). On en trouve la dépendance cherchée

$$n^e(\theta) = n_o n_e/\sqrt{n_o^2 - (n_o^2 - n_e^2)\cos^2\theta}. \qquad (2.1.2)$$

De (2.1.2) il résulte que la vitesse de l'onde extraordinaire se propageant sous l'angle θ par rapport à l'axe optique a pour expression

$$v_e(\theta) = c/n^e(\theta) = c\sqrt{n_o^2 - (n_o^2 - n_e^2)\cos^2\theta}/n_o n_e. \qquad (2.1.3)$$

Types de synchronisme de phase pour la génération de deuxième harmonique dans les cristaux uniaxiaux. — Dans le domaine de transparence du diélectrique, la dispersion de l'indice de réfraction est normale: l'indice de réfraction augmente lorsque la fréquence augmente. La fig. 2.2 montre les sections des indicatrices d'indice de réfraction d'un cristal uniaxial négatif pour l'onde fondamentale (courbes en traits pleins) et pour le deuxième harmonique (courbes en traits interrompus). Comme il est visible sur cette figure, dans

[1]) L'indice « e » est placé ici en haut pour ne pas confondre l'indice de réfraction considéré, qui est fonction de θ, avec la valeur principale de l'indice de réfraction notée n_e.

des directions OA faisant un angle θ_s avec l'axe optique, l'indice de réfraction de l'onde ordinaire de pulsation fondamentale est égal à l'indice de réfraction de l'onde extraordinaire du deuxième harmonique :

$$n_o(\omega) = n^e(2\omega). \qquad (2.1.4)$$

La relation (2.1.4) peut être considérée comme une condition de synchronisme de phase pour la génération de deuxième harmonique dans le cas où les vecteurs d'onde des ondes en interaction sont colinéaires, les ondes fondamentales sont ordinaires alors que l'onde du deuxième harmonique est extraordinaire. Pour réaliser la condition de synchronisme, les vecteurs d'onde doivent être orientés suivant les directions OA qui sont appelées *directions de synchronisme*, et l'angle θ_s est dit *angle de synchronisme*. Dans l'espace, ces directions forment un cône de synchronisme.

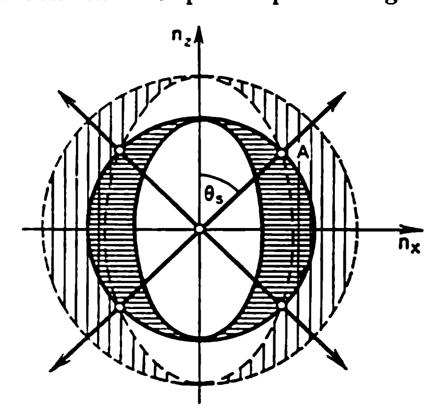


Fig. 2.2

L'exemple que nous venons de considérer correspond à l'une des variétés de synchronisme de phase.

On distingue deux types de synchronisme. Dans le *premier type*, les deux ondes de pulsation fondamentale possèdent une même polarisation rectiligne, alors que l'onde du deuxième harmonique a une polarisation perpendiculaire. Dans le synchronisme du *second type*, les ondes de pulsation fondamentale ont des polarisations perpendiculaires l'une à l'autre. Si le cristal uniaxial est négatif, le synchronisme du premier type peut être réalisé dans le cas où les deux ondes de pulsation fondamentale sont ordinaires, et l'onde du deuxième harmonique est extraordinaire ; c'est le cas du synchronisme *ooe* ou, autrement dit, de l'interaction *ooe*. Dans le cristal uniaxial positif, le synchronisme du premier type peut être réalisé lorsque les ondes fondamentales sont extraordinaires, et l'onde du deuxième harmonique, ordinaire (interaction *eeo*). Le synchronisme du second type correspond à l'interaction *oee* dans un cristal négatif et à l'interaction *eoo* dans un cristal positif (Tableau 2.1).

De plus, il convient de distinguer les synchronismes *scalaire* et *vectoriel*. Les vecteurs d'onde des ondes lumineuses interagissantes sont colinéaires dans le synchronisme scalaire et ne le sont pas dans le synchronisme vectoriel.

Ainsi, dans le cas où l'on se limite à des cristaux uniaxiaux négatifs, il convient de considérer quatre types de synchronisme :

Tableau 2.1

Types de synchronisme	Cristaux	
	négatifs	positifs
Premier	*ooe*	*eeo*
Second	*oee*	*eoo*

les synchronismes scalaires *ooe* et *oee* et les synchronismes vectoriels *ooe* et *oee*. L'exemple donné plus haut correspond au synchronisme *ooe* scalaire.

Avant de procéder à l'étude des différents types de synchronisme, remarquons que la condition de synchronisme est imposée aux vecteurs d'onde [v. (1.4.25)]. Il faut donc passer des surfaces de valeurs de l'indice de réfraction aux surfaces de vecteurs d'onde en utilisant à cet effet la relation connue $k = n\omega/c$. Dans ce qui suit nous considérons justement les sections des surfaces de vecteurs d'onde.

Synchronisme *ooe* scalaire. — Dans le cas de l'interaction *ooe*, a condition de synchronisme (1.4.25) peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^o = \mathbf{K}^e. \tag{2.1.5}$$

Puisque $|\mathbf{k}_1^o| = |\mathbf{k}_2^o|$, la relation (2.1.5) pour la variante scalaire (colinéaire) de ce type de synchronisme prend une forme plus simple

$$2\mathbf{k}_1^o = \mathbf{K}^e. \tag{2.1.6}$$

Ainsi

$$2k_1^o = K^e. \tag{2.1.7}$$

Passons des vecteurs d'onde aux indices de réfraction. Il vient

$$2n_o(\omega)\,\omega/c = n^e(2\omega)\,2\omega/c,$$

ce qui est équivalent au résultat (2.1.4).

En utilisant (2.1.2) et en introduisant les notations $n_{o1} = n_o(\omega)$, $n_{o2} = n_o(2\omega)$, $n_{e2} = n_e(2\omega)$, récrivons (2.1.4) sous la forme

$$n_{o1} = n_{o2}n_{e2}/\sqrt{n_{o2}^2 - (n_{o2}^2 - n_{e2}^2)\cos^2\theta_s^{(1)}}. \tag{2.1.8}$$

On en tire

$$\cos\theta_s^{(1)} = (n_{o2}/n_{o1})\sqrt{(n_{o1}^2 - n_{e2}^2)/(n_{o2}^2 - n_{e2}^2)}. \tag{2.1.9}$$

L'angle $\theta_s^{(1)}$ est appelé angle de premier synchronisme. Une condition nécessaire et suffisante pour que cet angle existe s'exprime par

$$n_{o1} \leqslant n_{e2}. \tag{2.1.10}$$

Si $\theta_s^{(1)} = 90°$, on parle du synchronisme à 90°. Un tel synchronisme offre plusieurs avantages qui seront examinés plus loin.

Le synchronisme *ooe* scalaire est illustré à la fig. 2.3, *a*. On y voit les sections des surfaces de vecteurs d'onde $\mathbf{k}_1^o$, $2\mathbf{k}_1^o$, $\mathbf{K}^e$. Les désignations utilisées sont: $k_o = n_{o1}\omega/c$, $K_o = n_{o2}\, 2\omega/c$, $K_e = n_{e2}\, 2\omega/c$ (ne pas confondre K_e avec K^e, ce dernier dépendant de l'angle fait par la direction choisie et l'axe optique Oz du cristal).

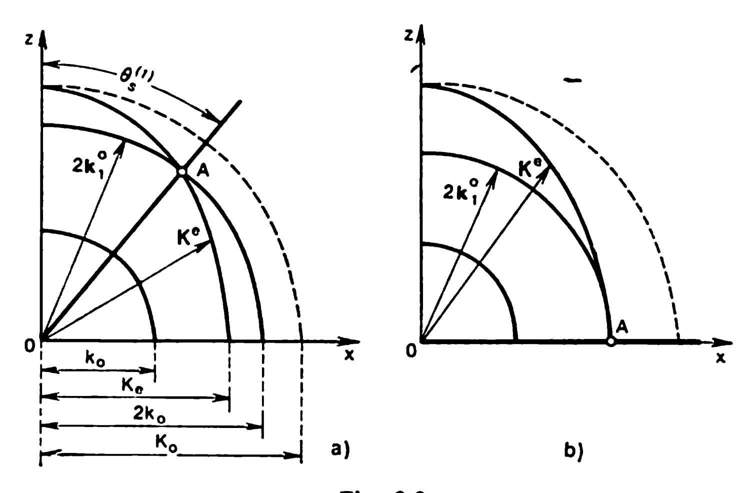


Fig. 2.3

La condition de synchronisme (2.1.6) est satisfaite lorsque les vecteurs $\mathbf{k}_1^o$ et $\mathbf{K}^e$ sont orientés suivant la droite OA ; l'angle formé entre la droite OA et l'axe optique du cristal est l'angle de premier synchronisme (angle $\theta_s^{(1)}$). La fig. 2.3, *b* correspond au cas de synchronisme à 90°.

Synchronisme *oee* scalaire. — Pour l'interaction *oee*, la condition de synchronisme de phase (1.4.25) prend la forme

$$\mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^e = \mathbf{K}^e. \tag{2.1.11}$$

Dans la variante scalaire du synchronisme tous les vecteurs sont colinéaires, ce qui permet de passer de (2.1.11) à une égalité scalaire

$$k_1^o + k_2^e = K^e. \tag{2.1.12}$$

Puis, passons des vecteurs d'onde aux indices de réfraction. Il vient

$$n_o(\omega) + n^e(\omega) = 2n^e(2\omega). \tag{2.1.13}$$

En utilisant (2.1.2) et en introduisant les désignations $n_{o1} = n_o(\omega)$, $n_{e1} = n_e(\omega)$, $n_{o2} = n_o(2\omega)$, $n_{e2} = n_e(2\omega)$, récrivons (2.1.13) sous

la forme

$$n_{o1}+\frac{n_{o1}n_{e1}}{\sqrt{n_{o1}^2-(n_{o1}^2-n_{e1}^2)\cos^2\theta_s^{(2)}}}=\frac{2n_{o2}n_{e2}}{\sqrt{n_{o2}^2-(n_{o2}^2-n_{e2}^2)\cos^2\theta_s^{(2)}}}. \quad (2.1.14)$$

La relation (2.1.14) permet de déterminer l'angle $\theta_s^{(2)}$.

Le synchronisme *oee* scalaire est illustré à la fig. 2.4. On y voit les sections des surfaces de vecteurs d'onde $\mathbf{k}_1^o$, $2\mathbf{k}_1^o$, $\mathbf{k}_2^e$, $\mathbf{K}^e$ et $\mathbf{k}'$; $\mathbf{k}'$ désigne un vecteur d'onde dont la valeur dans toute direction

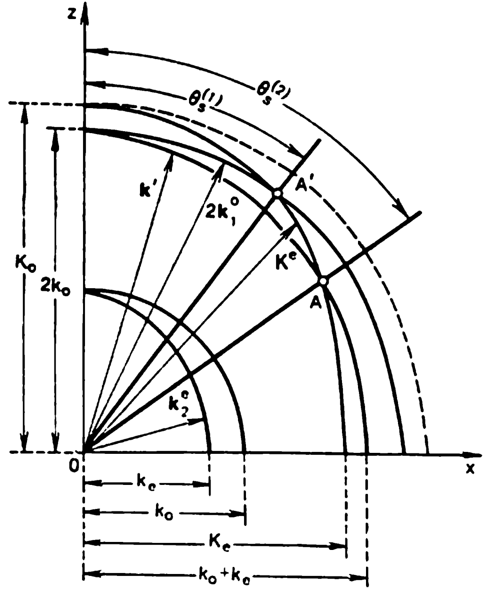


Fig. 2.4

choisie est égale à la somme des valeurs des vecteurs $\mathbf{k}_1^o$ et $\mathbf{k}_2^e$ considérés pour une direction donnée. Les notations utilisées sont: $k_o = n_{o1}\,\omega/c$, $k_e = n_{e1}\,\omega/c$, $K_o = n_{o2}2\omega/c$, $K_e = n_{e2}\,2\omega/c$. La condition de synchronisme *oee* scalaire est satisfaite lorsque les vecteurs $\mathbf{k}_1^o$, $\mathbf{k}_2^e$ et $\mathbf{K}^e$ sont orientés suivant la droite OA ; l'angle $\theta_s^{(2)}$ formé entre la droite OA et l'axe optique Oz du cristal est l'angle de second synchronisme. Sur la même figure on a indiqué la direction OA' du synchronisme *ooe* scalaire. Remarquons que dans tous les cas

$$\theta_s^{(1)}<\theta_s^{(2)}, \quad (2.1.15)$$

car dans les cristaux négatifs $n_e < n_o$.

Synchronismes vectoriels. — Le synchronisme *ooe* vectoriel, décrit par la relation (2.1.5), est illustré à la fig. 2.5, *a*. On y voit les

sections des surfaces de vecteurs d'onde $\mathbf{k}_1^o$ et $\mathbf{k}_2^o$ (ces sections sont confondues) ainsi que des vecteurs $2\mathbf{k}_1^o$ et $\mathbf{K}^e$. Les flèches en traits fins indiquent les vecteurs d'onde à directions quelconques; les flèches en traits forts figurent les vecteurs $\mathbf{k}_1^o$, $\mathbf{k}_2^o$ et $\mathbf{K}^e$ qui satisfont

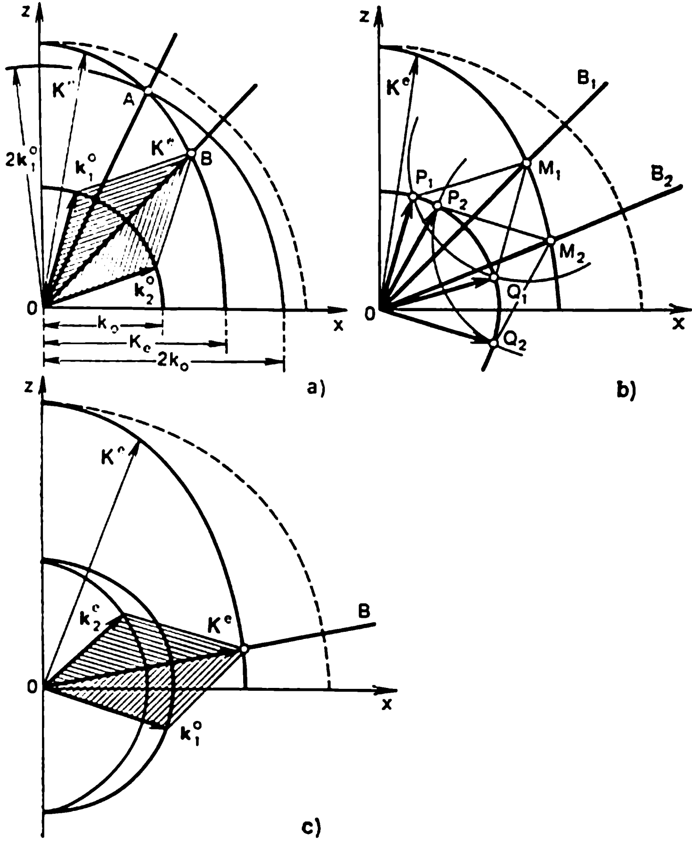


Fig. 2.5

à la condition de synchronisme de phases (2.1.5); les orientations de tous les trois vecteurs sont différentes. La direction *OB* est celle du vecteur d'onde du deuxième harmonique; nous l'appellerons direction de synchronisme *ooe* vectoriel. Dans la même figure on a montré, aux fins de comparaison, la direction de synchronisme *ooe* scalaire (droite *OA*).

Il faut souligner que l'angle de synchronisme *ooe* scalaire est fixé dans un cristal donné pour une fréquence donnée, alors que l'an-

gle de synchronisme *ooe* vectoriel peut être choisi dans certaines limites. En outre, l'angle de synchronisme *ooe* vectoriel est toujours plus grand que l'angle de synchronisme *ooe* scalaire. Reportons-nous à la fig. 2.5, *b*. Soit la direction OB_1 choisie pour celle de synchronisme *ooe* vectoriel. Menons une circonférence de rayon $|\mathbf{k}_1^o|$ centrée sur le point M_1 où la droite OB_1 rencontre la section de la surface du vecteur $\mathbf{K}^e$.

Cette circonférence coupe la section de la surface de vecteur $\mathbf{k}_1^o$ aux points P_1 et Q_1. Ces points déterminent les directions des vecteurs $\mathbf{k}_1^o$ et $\mathbf{k}_2^o$ respectivement ; c'est précisément de telle façon que doivent être orientés les vecteurs d'onde des ondes de pulsation fondamentale pour que le vecteur d'onde du deuxième harmonique ait la direction OB_1 choisie. La même figure indique encore une direction de synchronisme vectoriel, à savoir OB_2. Dans ce cas les directions des vecteurs $\mathbf{k}_1^o$ et $\mathbf{k}_2^o$ sont déterminées par les points P_2 et Q_2.

Le synchronisme *oee* vectoriel est décrit par la relation (2.1.11). Il est illustré par la fig. 2.5, *c* qui montre les sections des surfaces de vecteurs d'onde $\mathbf{k}_1^o$, $\mathbf{k}_2^e$ et $\mathbf{K}^e$. Les flèches en traits forts désignent les vecteurs mentionnés qui satisfont à la condition de synchronisme (2.1.11) dans le cas où la direction OB est choisie pour celle du vecteur d'onde du deuxième harmonique (direction de synchronisme *oee* vectoriel). Remarquons que l'angle de synchronisme *oee* vectoriel est toujours plus grand que l'angle de synchronisme *oee* scalaire et donc plus grand que l'angle de synchronisme *ooe* scalaire.

§ 2.2. Equations tronquées pour la génération de deuxième harmonique à l'approximation des ondes planes. Coefficients de couplage non linéaire

Considérons un diélectrique non linéaire quadratique. En introduisant les expressions (1.1.11a) et (1.1.12a) dans (1.1.16), on obtient l'équation d'onde pour le cas considéré :

$$\hat{L}\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\chi : \mathbf{E}\mathbf{E}), \qquad (2.2.1)$$

où l'opérateur $\hat{L}$ est de la forme

$$\hat{L} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} + \frac{1}{c^2}(1 + 4\pi\alpha:)\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon:. \qquad (2.2.1a)$$

Les tentatives de résoudre l'équation (2.2.1) sous la forme générale se heurtent à des difficultés mathématiques insurmontables. On est donc amené à introduire toute une série de simplifications.

Simplifications: principale et auxiliaires. — La simplification principale est liée à ce que l'amplitude de l'onde lumineuse peut être considérée comme une fonction lentement variable des coordonnées

et du temps ; v. (1.3.2). C'est à base de cette simplification qu'a été développée la *méthode des amplitudes lentement variables* permettant de ramener l'équation d'onde à un système dit d'*équations tronquées* pour les amplitudes des ondes lumineuses interagissantes [1]).

En plus de la simplification principale, nous utiliserons quelques simplifications auxiliaires. Premièrement, nous n'allons considérer que deux ondes lumineuses différentes : de pulsation fondamentale ω et de pulsation du deuxième harmonique 2ω. Ceci signifie que la production possible du troisième harmonique et d'autres harmoniques n'est pas prise en compte. Cette simplification est justifiée du fait qu'en règle générale lorsqu'on réalise la condition de synchronisme pour l'obtention du deuxième harmonique, on n'arrive pas à le faire également pour d'autres harmoniques ; de plus, les harmoniques supérieurs tombent généralement dans les bandes d'absorption. La limitation à deux ondes lumineuses (de pulsations ω et 2ω) signifie également que l'on considère le cas du *synchronisme ooe scalaire*. Si l'on utilisait d'autres types de synchronisme, il faudrait considérer deux ondes lumineuses de pulsation ω au lieu d'une seule (plus une onde de pulsation 2ω). Les ondes de pulsation ω seraient différentes l'une de l'autre soit par la direction du vecteur d'onde (synchronisme *ooe* vectoriel ; v. fig. 2.5, *a*), soit par la polarisation et par la valeur du vecteur d'onde (synchronisme *oee* scalaire ; v. fig. 2.4), soit par la polarisation, par la valeur et par la direction du vecteur d'onde (synchronisme *oee* vectoriel ; v. fig. 2.5, *c*).

Deuxièmement, nous allons considérer un problème unidimensionnel stationnaire : deux ondes *planes* d'amplitudes *stationnaires* se propageant dans *une* direction (direction des z). Les amplitudes des ondes ne dépendent que de la coordonnée z.

Avec les hypothèses simplificatrices indiquées, représentons le champ d'onde lumineuse par une superposition du champ de l'onde de pulsation ω et du champ de l'onde de pulsation 2ω :

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2}\{\mathbf{e}_1 A_1(z) \exp[i(\omega t - kz)] + \mathbf{e}_2 A_2(z)[i(2\omega t - Kz)] + \text{c.c.}\}, \quad (2.2.2)$$

où

$$k = \omega n(\omega)/c; \quad K = 2\omega n(2\omega)/c. \quad (2.2.3)$$

Introduisant l'expression (2.2.2) dans (1.1.12a) et en ne gardant que des termes de pulsations ω et 2ω, on obtient

$$\mathbf{P}_{\text{nl}}(z, t) = \frac{1}{4}\chi : \{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 A_1^2(z) \exp[i(2\omega t - 2kz)] + 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 A_1^*(z) A_2(z) \exp[i\omega t - i(K-k)z] + \text{c.c.}\}. \quad (2.2.4)$$

[1]) Cette méthode a été développée dans la théorie des oscillations non linéaires [4] et généralisée par R. Khokhlov au cas des processus ondulatoires. Pour plus de détails sur la méthode des amplitudes lentement variables, voir [5].

(ce même résultat pourrait s'obtenir en utilisant la relation (1.3.5) à condition d'y poser $\omega_1 = \omega$ et $\omega_2 = 2\omega$).

La différence $K - 2k \equiv \Delta k$ est appelée *désaccord d'onde* (v. § 1.4). Nous supposerons que $\Delta k \ll k$, $\Delta k \ll K$.

Représentons $\varepsilon = \text{Re}\,\varepsilon - i\,\text{Im}\,\varepsilon$. Le milieu sera supposé *faiblement absorbant*

$$\text{Im}\,\varepsilon \ll \text{Re}\,\varepsilon \tag{2.2.5}$$

et *faiblement non linéaire*

$$(\chi \cong \text{Re}\,\chi) \ll \text{Re}\,\alpha\,/E. \tag{2.2.6}$$

Les divers facteurs qui accompagnent le processus de génération de deuxième harmonique et influent sur son efficacité (absorption non linéaire, auto-actions thermiques et autres) seront pris en compte plus loin.

Etablissement des équations tronquées pour les amplitudes complexes [1]). — En faisant usage de la relation bien connue en analyse vectorielle, écrivons

$$\text{rot rot}\,\mathbf{E} = \text{grad div}\,\mathbf{E} - \nabla^2\mathbf{E}. \tag{2.2.7a}$$

Supposons que div $\mathbf{E} = 0$ [2]) et par conséquent

$$\text{rot rot}\,\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E}. \tag{2.2.7b}$$

Compte tenu du fait que **E** ne dépend pas des coordonnées spatiales transversales, on en déduit l'expression suivante pour l'opérateur $\hat{L}$:

$$\hat{L} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon:. \tag{2.2.8}$$

En faisant usage de (2.2.2) et (2.2.8), on peut récrire l'équation d'onde (2.2.1) sous la forme

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon:\mathbf{E}) =$$
$$= -\frac{\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi:\{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1A_1^2(z)\exp[i(2\omega t - 2kz)] +$$
$$+ 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2A_1^*(z)\,A_2(z)\exp[i\omega t - i(K-k)z] + \text{c.c.}\}. \tag{2.2.9}$$

La « force excitatrice » figurant au second membre de l'équation (2.2.9) comprend, de même que le champ **E**, quatre termes: deux ondes de pulsation ω et deux harmoniques de pulsation 2ω. Le premier membre de l'équation (2.2.9) étant linéaire en champ, cette équation peut être séparée en quatre équations, une pour chaque harmonique. Ecrivons deux d'entre elles. La première comprend l'har-

[1]) Nous considérons ici la situation la plus simple (unidimensionnelle). Pour l'établissement des équations tronquées dans le cas plus général, voir [5].

[2]) En toute rigueur, ceci n'est valable que pour un milieu isotrope. On reviendra sur cette question plus loin.

monique fondamental de polarisation et l'harmonique fondamental du champ d'onde lumineuse:

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon:\right)\mathbf{e}_1A_1(z)\exp[i(\omega t-kz)]=$$
$$=-\frac{2\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi:\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2A_1^*(z)A_2(z)\exp[i\omega t-i(K-k)z]. \quad (2.2.10)$$

La deuxième fait intervenir le deuxième harmonique de polarisation et le deuxième harmonique du champ d'onde lumineuse:

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varepsilon:\right)\mathbf{e}_2A_2(z)\exp[i(2\omega t-Kz)]=$$
$$=-\frac{\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi:\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1A_1^2(z)\exp[i(2\omega t-2kz)]. \quad (2.2.11)$$

Ces équations peuvent être complétées par deux équations qui correspondent aux termes complexes conjugués figurant au second membre de (2.2.9).

Après la différentiation, les équations (2.2.10) et (2.2.11) deviennent

$$\left(-\frac{d^2A_1}{dz^2}+2ik\frac{dA_1}{dz}+k^2A_1-\frac{\omega^2}{c^2}A_1\varepsilon:\right)\mathbf{e}_1\exp(i\omega t-ikz)=$$
$$=(4\pi\omega^2/c^2)\,\chi:\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2A_1^*A_2\exp[i\omega t-i(K-k)z]; \quad (2.2.12)$$
$$\left(-\frac{d^2A_2}{dz^2}+2iK\frac{dA_2}{dz}+K^2A_2-\frac{4\omega^2}{c^2}A_2\varepsilon:\right)\times$$
$$\times\mathbf{e}_2\exp(i2\omega t-iKz)=(8\pi\omega^2/c^2)\,\chi:\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1A_1^2\exp(i2\omega t-i2kz). \quad (2.2.13)$$

Les variations des amplitudes étant lentes, supposons vérifiées les inégalités suivantes:

$$\frac{d^2A_1}{dz^2}\ll 2k\frac{dA_1}{dz};\quad \frac{d^2A_2}{dz^2}\ll 2K\frac{dA_2}{dz}. \quad (2.2.14)$$

Partant de (2.2.14), négligeons les termes d^2A_1/dz^2 et d^2A_2/dz^2 figurant dans les équations des amplitudes. De plus, tenons compte du fait que

$$\left.\begin{aligned}k^2\mathbf{e}_1&=(\omega^2/c^2)\,\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega):\mathbf{e}_1;\\ K^2\mathbf{e}_2&=(4\omega^2/c^2)\,\mathrm{Re}\,\varepsilon(2\omega):\mathbf{e}_2.\end{aligned}\right\} \quad (2.2.15)$$

[Ces relations sont équivalentes aux relations (2.2.3).] Enfin, divisons les deux membres de l'équation (2.2.12) par exp $(i\omega t - ikz)$ et les deux membres de l'équation (2.2.13) par exp $(i2\omega t - iKz)$.

Les équations (2.2.12) et (2.2.13)′ deviennent alors

$$\left(2ki\,\frac{dA_1}{dz}+i\,\frac{\omega^2}{c^2}\,A_1\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega):\right)\mathbf{e}_1=$$
$$=(4\pi\omega^2/c^2)\,\chi(\omega):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2A_1^*A_2\exp(-i\Delta kz);\qquad(2.2.16)$$
$$\left(2iK\,\frac{dA_2}{dz}+i\,\frac{4\omega^2}{c^2}\,A_2\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(2\omega):\right)\mathbf{e}_2=$$
$$=(8\pi\omega^2/c^2)\,\chi(2\omega):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1A_1^2\exp(i\Delta kz).\qquad(2.2.17)$$

Multiplions les deux membres de l'équation (2.2.16) par $\mathbf{e}_1/2ik$, et les deux membres de l'équation (2.2.17) par $\mathbf{e}_2/2iK$. Compte tenu de (2.2.3), on obtient

$$dA_1/dz+[k\mathbf{e}_1(\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega):\mathbf{e}_1)/2n^2(\omega)]\,A_1=$$
$$=-2\pi i\,[k\mathbf{e}_1(\chi(\omega):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)/n^2(\omega)]\,A_1^*A_2\exp(-i\Delta kz);\qquad(2.2.18)$$
$$dA_2/dz+[K\mathbf{e}_2(\mathrm{Im}\,\varepsilon(2\omega):\mathbf{e}_2)/2n^2(2\omega)]\,A_2=$$
$$=-\pi i\,[K\mathbf{e}_2(\chi(2\omega):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)/n^2(2\omega)]\,A_1^2\exp(i\Delta kz).\qquad(2.2.19)$$

Introduisons les désignations suivantes [1])

$$\left.\begin{aligned}\delta_1&=k\mathbf{e}_1(\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega):\mathbf{e}_1)/2n^2(\omega);\\ \delta_2&=K\mathbf{e}_2(\mathrm{Im}\,\varepsilon(2\omega):\mathbf{e}_2)/2n^2(2\omega);\end{aligned}\right\}\qquad(2.2.20)$$
$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=2\pi k\mathbf{e}_1(\chi(\omega):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)/n^2(\omega);\\ \sigma_2&=\pi K\mathbf{e}_2(\chi(2\omega):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)/n^2(2\omega).\end{aligned}\right\}\qquad(2.2.21)$$

Les coefficients δ_1 et δ_2 sont appelés *coefficients d'absorption linéaire*, et les coefficients σ_1 et σ_2, *coefficients de couplage non linéaire*. Ainsi, nous avons obtenu le système suivant d'équations tronquées pour les amplitudes complexes $A_1(z)$ et $A_2(z)$ [7], [8]:

$$\boxed{\begin{aligned}dA_1/dz+\delta_1A_1&=-i\sigma_1A_1^*A_2\exp(-i\Delta kz);\\ dA_2/dz+\delta_2A_2&=-i\sigma_2A_1^2\exp(i\Delta kz).\end{aligned}}\qquad(2.2.22)$$

Ce système doit être complété par les conditions aux limites

$$A_1(z)|_{z=0}=A_{10};\quad A_2(z)|_{z=0}=A_{20}.\qquad(2.2.23)$$

Système d'équations tronquées pour les amplitudes réelles et la phase généralisée. — Passons des amplitudes *complexes* $A_1(z)$ et $A_2(z)$ aux amplitudes *réelles* $a_1(z)$ et $a_2(z)$ et aux phases $\varphi_1(z)$

---

[1]) Rappelons que nous utilisons la forme vectorielle de l'écriture:

$$(\mathrm{Im}\,\varepsilon:\mathbf{e}_1)_l=\sum_j\mathrm{Im}\,\varepsilon_{lj}e_{1j};\quad(\chi:\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)_l=\sum_j\sum_m\chi_{ljm}e_{1j}e_{2m}.$$

et $\varphi_2(z)$:

$$A_{1,2}(z) = |A_{1,2}(z)| \exp i\varphi_{1,2}(z) = a_{1,2}(z) \exp i\varphi_{1,2}(z). \quad (2.2.24)$$

Introduisons (2.2.24) dans (2.2.22) et divisons les deux membres de la première équation par $\exp i\varphi_1$, et ceux de la seconde équation par $\exp i\varphi_2$. Il vient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{da_1}{dz} + ia_1 \frac{d\varphi_1}{dz} + \delta_1 a_1 = \\ &= -i\sigma_1 a_1 a_2 \exp[-i(2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kz)]; \\ &\frac{da_2}{dz} + ia_2 \frac{d\varphi_2}{dz} + \delta_2 a_2 = \\ &= -i\sigma_2 a_1^2 \exp[i(2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kz)]. \end{aligned}\right\} \quad (2.2.25)$$

La grandeur

$$2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kz \equiv \Psi \quad (2.2.26)$$

est appelée *phase généralisée*. En faisant usage de la relation $\exp(\pm i\Psi) = \cos\Psi \pm i \sin\Psi$, récrivons (2.2.25) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &\frac{da_1}{dz} + \delta_1 a_1 + \sigma_1 a_1 a_2 \sin\Psi = \\ &= -ia_1\left(\frac{d\varphi_1}{dz} + \sigma_1 a_2 \cos\Psi\right); \\ &\frac{da_2}{dz} + \delta_2 a_2 - \sigma_2 a_1^2 \sin\Psi = \\ &= -ia_2\left(\frac{d\varphi_2}{dz} + \sigma_2 \frac{a_1^2}{a_2} \cos\Psi\right). \end{aligned}\right\} \quad (2.2.27)$$

En séparant les parties réelle et imaginaire des équations et en tenant compte que $2d\varphi_1/dz - d\varphi_2/dz = d\Psi/dz - \Delta k$, on obtient à partir de (2.2.27) un système d'équations tronquées pour les amplitudes réelles $a_1(z)$ et $a_2(z)$ et la phase généralisée $\Psi(z)$:

$$\boxed{\begin{aligned} &da_1/dz + \delta_1 a_1 + \sigma_1 a_1 a_2 \sin\Psi = 0; \\ &da_2/dz + \delta_2 a_2 - \sigma_2 a_1^2 \sin\Psi = 0; \\ &d\Psi/dz - \Delta k + (2\sigma_1 a_2 - \sigma_2 a_1^2/a_2)\cos\Psi = 0. \end{aligned}} \quad (2.2.28)$$

Le système (2.2.28) est valable pour le synchronisme *ooe* scalaire. Comme cela a été dit plus haut, pour d'autres types de synchronisme on doit considérer deux ondes de pulsation ω au lieu d'une seule. Désignons les amplitudes réelles et les phases de ces ondes par $a_1^{(1)}$, $\varphi_1^{(1)}$ et $a_1^{(2)}$, $\varphi_1^{(2)}$. Soient $\mathbf{e}_1^{(1)}$, $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{e}_1^{(2)}$, $\mathbf{k}_2$ les vecteurs de polarisation et les vecteurs d'onde de ces ondes, $n_1(\omega)$ et $n_2(\omega)$, les indices de réfraction correspondants. Dans le cas considéré, au lieu de deux coefficients d'absorption linéaire et de deux coefficients de couplage non linéaire

il y a trois coefficients d'absorption et trois coefficients de couplage:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1^{(1,\,2)} &= k_{1,\,2}\frac{\mathbf{e}_1^{(1,\,2)}\left(\operatorname{Im}\varepsilon_{1,\,2}(\omega):\mathbf{e}_1^{(1,\,2)}\right)}{2\left(n_{1,\,2}(\omega)\right)^2};\\ \delta_2 &= K\frac{\mathbf{e}_2\left(\operatorname{Im}\varepsilon(2\omega):\mathbf{e}_2\right)}{2n^2(2\omega)}; \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.29)$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1^{(1,\,2)} &= 2\pi k_{1,\,2}\frac{\mathbf{e}_1^{(1,\,2)}\left(\chi(\omega):\mathbf{e}_1^{(2,\,1)}\mathbf{e}_2\right)}{\left(n_{1,\,2}(\omega)\right)^2};\\ \sigma_2 &= \pi K\frac{\mathbf{e}_2\left(\chi(2\omega):\mathbf{e}_1^{(1)}\mathbf{e}_1^{(2)}\right)}{n^2(2\omega)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.30)$$

Le système d'équations tronquées pour les amplitudes réelles et la phase généralisée comprend maintenant quatre équations au lieu de trois [7], [9]:

$$\begin{aligned} da_1^{(1)}/dz+\delta_1^{(1)}a_1^{(1)}+\sigma_1^{(1)}a_1^{(2)}a_2\sin\Psi &= 0;\\ da_1^{(2)}/dz+\delta_1^{(2)}a_1^{(2)}+\sigma_1^{(2)}a_1^{(1)}a_2\sin\Psi &= 0;\\ da_2/dz+\delta_2a_2-\sigma_2a_1^{(1)}a_1^{(2)}\sin\Psi &= 0;\\ \frac{d\Psi}{dz}-\Delta k+\left(\frac{\sigma_1^{(1)}a_1^{(2)}a_2}{a_1^{(1)}}+\frac{\sigma_1^{(2)}a_1^{(1)}a_2}{a_1^{(2)}}-\frac{\sigma_2a_1^{(1)}a_1^{(2)}}{a_2}\right)\cos\Psi &= 0. \end{aligned} \qquad (2.2.31)$$

La phase généralisée Ψ est définie par la relation

$$\Psi=\varphi_1^{(1)}+\varphi_1^{(2)}-\varphi_2+\Delta kz, \qquad (2.2.32)$$

où Δk est la projection du vecteur $(\mathbf{K}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)$ sur l'axe des z.

Concrétisation des coefficients de couplage non linéaire. — Les relations définissant les coefficients de couplage non linéaire (2.2.21) et (2.2.30) comprennent des expressions de la forme

$$\mathbf{e}_1\left(\chi(\omega):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\right);\quad \mathbf{e}_2\left(\chi(2\omega):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\right) \qquad (2.2.33)$$

pour le synchronisme *ooe* scalaire et de la forme

$$\mathbf{e}_1^{(1,\,2)}\left(\chi(\omega):\mathbf{e}_1^{(2,\,1)}\mathbf{e}_2\right);\quad \mathbf{e}_2\left(\chi(2\omega):\mathbf{e}_1^{(1)}\mathbf{e}_1^{(2)}\right) \qquad (2.2.34)$$

pour d'autres synchronismes. Par raison de simplification, considérons le seul synchronisme *ooe* scalaire et donc les expressions (2.2.33). Notons

$$\mathbf{p}_1(\omega)=\chi(\omega):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2;\quad \mathbf{p}_2(2\omega)=\chi(2\omega):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1. \qquad (2.2.35)$$

En passant de la forme vectorielle de représentation à la forme ordinaire, récrivons (2.2.35) sous la forme

$$p_{1i}(\omega)=\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\chi_{ijm}(\omega)\,e_{1j}e_{2m}; \qquad (2.2.36)$$

$$p_{2i}(2\omega)=\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\chi_{ijm}(2\omega)\,e_{1j}e_{1m}. \qquad (2.2.37)$$

Représentons (2.2.36) sous une forme plus détaillée:

$$p_{1x} = \chi_{xxx}e_{1x}e_{2x} + \chi_{xxy}e_{1x}e_{2y} + \chi_{xxz}e_{1x}e_{2z} + \\ + \chi_{xyx}e_{1y}e_{2x} + \chi_{xyy}e_{1y}e_{2y} + \chi_{xyz}e_{1y}e_{2z} + \\ + \chi_{xzx}e_{1z}e_{2x} + \chi_{xzy}e_{1z}e_{2y} + \chi_{xzz}e_{1z}e_{2z}. \quad (2.2.38)$$

Les composantes des vecteurs $\mathbf{p}_{1,2}$ entrant dans les expressions de la forme (2.2.38) se déterminent par la polarisation de l'onde (par la direction d'oscillations du vecteur intensité électrique); les composantes non nulles du tenseur χ se déterminent par la symétrie du cristal donné, leurs valeurs absolues s'obtiennent en règle générale par voie expérimentale (dans certains cas les composantes du vecteur χ peuvent être calculées [10]). Après avoir déterminé les composantes du vecteur $\mathbf{p}_1$, on trouve la forme concrète de l'une des expressions cherchées:

$$\mathbf{e}_1(\chi:\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1\mathbf{p}_1 = e_{1x}p_{1x} + e_{1y}p_{1y} + e_{1z}p_{1z}. \quad (2.2.39)$$

Les composantes des vecteurs $\mathbf{e}_{1,2}$ ne dépendent évidemment pas du choix du cristal; elles sont déterminées par le type de synchronisme. Dans le cas du synchronisme *ooe*, l'onde fondamentale est une onde ordinaire et donc le vecteur $\mathbf{e}_1$ est perpendiculaire au plan de la section principale (au plan passant par l'axe optique z du cristal et la direction de propagation des ondes). L'onde du deuxième harmonique est extraordinaire; le vecteur $\mathbf{e}_2$ se situe dans le plan de la section principale. Introduisons les angles directeurs θ et φ. L'angle θ est compté à partir de l'axe des z positifs, et l'angle φ, à partir de l'un des axes cristallographiques, par exemple de l'axe x; v. fig. 2.6

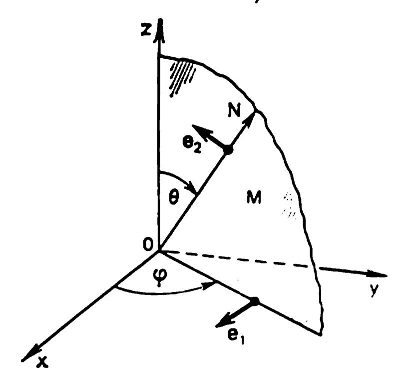


Fig. 2.6

(*ON* est la direction de propagation des ondes, *M*, le plan de la section principale; la biréfringence est ici négligée et donc la différence de direction des vecteurs d'onde et de rayon de l'onde extraordinaire n'est pas prise en compte). En examinant la fig. 2.6, on voit que

$$\left.\begin{aligned} e_{1x} &= \sin\varphi; \quad e_{1y} = -\cos\varphi; \quad e_{1z} = 0; \\ e_{2x} &= -\cos\varphi\cos\theta; \quad e_{2y} = -\sin\varphi\cos\theta; \quad e_{2z} = \sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (2.2.40)$$

Puis il faut tenir compte de la classe de symétrie du cristal non linéaire. Pour être plus concret, considérons la classe de symétrie C_{3v} à laquelle appartient notamment le cristal de niobate de lithium.

Concrétisation des coefficients de couplage non linéaire sur l'exemple de cristal de niobate de lithium [1]). — Dans le cristal de niobate de lithium l'axe optique z est un axe de symétrie de 3e ordre par lequel passent trois plans de symétrie (sous un angle de 120° l'un par rapport à l'autre). Un de ces plans est le plan zy. Les composantes non nulles du tenseur χ du cristal considéré (v. [2]) sont

$$\left.\begin{array}{c}\chi_{zzz}\,;\ \chi_{xxz}=\chi_{yyz}\,;\\ \chi_{yyy}=-\chi_{xyx}=-\chi_{yxx}\,;\ \chi_{zxx}=\chi_{zyy}.\end{array}\right\}\qquad(2.2.41)$$

Le tenseur χ étant symétrique par rapport aux deux derniers indices [par exemple, $\chi_{xxz}=\chi_{xzx}$; v. (1.2.8)], on peut conclure que dans les cristaux de la classe C_{3v} le tenseur χ a dans le cas général *onze* composantes non nulles. Quatre seulement de ces composantes ont des valeurs différentes (quatre composantes indépendantes). Si l'on passe conformément à (1.2.11) au système à deux indices, les composantes non nulles du tenseur de susceptibilité quadratique s'écrivent sous la forme

$$\left.\begin{array}{c}d_{33}\,;\ d_{15}=d_{24}\,;\\ d_{22}=-d_{16}=-d_{21}\,;\ d_{31}=d_{32}.\end{array}\right\}\qquad(2.2.42)$$

Ainsi, la matrice d_{ij} pour le cristal de niobate de lithium (et pour d'autres cristaux de la classe C_{3v}) est de la forme

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&d_{15}&-d_{22}\\ -d_{22}&d_{22}&0&d_{15}&0&0\\ d_{31}&d_{31}&d_{33}&0&0&0\end{pmatrix}.\qquad(2.2.43)$$

Dans les cristaux faiblement dispersifs, c'est-à-dire dans le cas où les fréquences ω et 2ω se situent loin des bandes caractéristiques d'absorption ultraviolette et infrarouge, le nombre de composantes non nulles indépendantes du tenseur χ peut diminuer parce que le tenseur χ devient dans ce cas symétrique par rapport à la permutation de tous les trois indices [v. (1.2.14)]. Pour la classe C_{3v}, ceci signifie que ne subsistent que trois composantes indépendantes :

$$\left.\begin{array}{c}\chi_{zzz}\,;\ \chi_{yyy}=-\chi_{xyx}=-\chi_{yxx}\,;\\ \chi_{xxz}=\chi_{yyz}=\chi_{zxx}=\chi_{zyy},\end{array}\right\}\qquad(2.2.44)$$

ou, dans le système à deux indices,

$$\left.\begin{array}{c}d_{33}\,;\ d_{22}=-d_{16}=-d_{21}\,;\\ d_{15}=d_{24}=d_{31}=d_{32}.\end{array}\right\}\qquad(2.2.45)$$

---

[1]) Pour la concrétisation dans le cas des cristaux du groupe de KDP, voir par exemple [5].

Pour le niobate de lithium, on indique généralement dans les tableaux non pas trois mais quatre composantes (d_{33}, d_{15}, d_{31}, d_{22}) (v. par exemple [8]). Le fait est qu'en cas de duplication de fréquence des lasers à néodyme (1,06 μm→→ 0,53 μm) la fréquence du deuxième harmonique se trouve située assez près du bord de la bande d'absorption ultraviolette du niobate de lithium, de sorte que la condition (1.2.14) n'est satisfaite que de façon approchée. Dans la littérature [8], on indique pour le rapport d_{31}/d_{15} la valeur de 0,8 à 1,1. Dans la suite de cet ouvrage nous adoptons $d_{31} = d_{15}$.

Pour déterminer les composantes du vecteur $\mathbf{p}_1$ nous utiliserons les relations (2.2.38) (plus des relations analogues pour les composantes y et z du vecteur $\mathbf{p}_1$) (2.2.40) et (2.2.44). En tenant compte de (2.2.44), récrivons (2.2.38) sous la forme

$$p_{1x} = \chi_{xxz}(e_{1x}e_{2z} + e_{1z}e_{2x}) - \chi_{yyy}(e_{1y}e_{2x} + e_{1x}e_{2y}).$$

En y portant (2.2.40), on trouve

$$p_{1x} = \chi_{xxz}\sin\varphi\sin\theta - \chi_{yyy}\cos 2\varphi\cos\theta. \tag{2.2.46a}$$

En opérant de façon identique, on obtient l'expression pour p_{1y}:

$$p_{1y} = \chi_{xxz}(e_{1y}e_{2z} + e_{1z}e_{2y}) + \chi_{yyy}(e_{1y}e_{2y} - e_{1x}e_{2x}).$$

Après introduction de (2.2.40) elle devient

$$p_{1y} = -\chi_{xxz}\cos\varphi\sin\theta + \chi_{yyy}\sin 2\varphi\cos\theta. \tag{2.2.46b}$$

Enfin on obtient pour p_{1z} [compte tenu de (2.2.40)]

$$p_{1z} = 0. \tag{2.2.46c}$$

Puis, en introduisant (2.2.46) et (2.2.40) dans (2.2.39), on trouve

$$\mathbf{e}_1(\chi : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1\mathbf{p}_1 = \chi_{xxz}\sin\theta - \chi_{yyy}\sin 3\varphi\cos\theta. \tag{2.2.47}$$

D'une manière analogue on trouve l'expression pour $\mathbf{e}_2(\chi : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)$:

$$\mathbf{e}_2(\chi : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2\mathbf{p}_2 = \chi_{xxz}\sin\theta - \chi_{yyy}\sin 3\varphi\cos\theta. \tag{2.2.48}$$

Ainsi on voit que les expressions pour $\mathbf{e}_1(\chi : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)$ et pour $\mathbf{e}_2(\chi : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)$ sont identiques. Dans le système à deux indices elles prennent la forme

$$\mathbf{e}_1\mathbf{p}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{p}_2 = d_{15}\sin\theta - d_{22}\sin 3\varphi\cos\theta. \tag{2.2.49}$$

En procédant de la même façon, on peut effectuer la concrétisation des coefficients de couplage non linéaire pour d'autres classes de symétrie et pour de différents types de synchronisme. Les résultats pour quelques classes de symétrie sont rassemblés dans le Tableau A.2.

Remarques sur la maximisation des coefficients de couplage non linéaire. — L'expression (2.2.49) est à optimiser suivant l'angle φ; l'angle θ est égal à l'angle de synchronisme θ_s. Suivant [8], dans le cristal de niobate de lithium la composante d_{22} est positive, et la composante d_{15} est négative; récrivons donc

(2.2.49) sous la forme

$$|\mathbf{e}_1\mathbf{p}_1| = |\mathbf{e}_2\mathbf{p}_2| = |d_{15}| \sin\theta_S + d_{22} \sin 3\varphi \cos\theta_S. \qquad (2.2.50)$$

Il s'ensuit de (2.2.50) que pour maximiser les coefficients de couplage non linéaire le cristal doit être orienté de telle sorte que soit réalisée la condition $\sin 3\varphi = 1$ ($\varphi = 30°$ ou $\varphi = 150°$); dans ce cas le deuxième terme de (2.2.50) est maximal. Pour $\varphi = 0$, au contraire, ce terme s'annule, ce qui peut être utilisé pour déterminer la composante d_{15}.

Remarquons que malgré $\theta = \theta_S$, l'optimisation suivant θ est néanmoins possible, par variation de l'angle de synchronisme en agissant par exemple sur la température du cristal. En dérivant (2.2.50) par rapport à θ_S (pour $\sin 3\varphi = 1$) et en annulant la dérivée, on trouve la valeur optimale de l'angle de synchronisme $\theta_{S\ \mathrm{opt}}$ pour laquelle le coefficient de couplage passe par son maximum

$$\theta_{S\ \mathrm{opt}} = \mathrm{arctg}\,(|d_{15}|/d_{22}). \qquad (2.2.51)$$

D'après [11], $|d_{15}|/d_{22} = 2$, d'où $\theta_{S\ \mathrm{opt}} = 64°$.

§ 2.3. Résolution des équations tronquées dans le cas où la condition de synchronisme est exactement vérifiée

Supposons que la condition de synchronisme est exactement satisfaite: $\Delta k = 0$. Dans ce cas les expressions (2.2.28) prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} &da_1/dz + \delta_1 a_1 + \sigma_1 a_1 a_2 \sin\Psi = 0;\\ &da_2/dz + \delta_2 a_1 - \sigma_2 a_1^2 \sin\Psi = 0;\\ &d\Psi/dz + (2\sigma_1 a_2 - \sigma_2 a_1^2/a_2)\cos\Psi = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.1)$$

où $\Psi = 2\varphi_1 - \varphi_2$.

Equations tronquées en l'absence de dispersion de l'absorption. — Supposons que la dispersion de l'absorption soit négligeable. Ceci signifie que

$$\mathrm{Im}\ \varepsilon(\omega) = \mathrm{Im}\ \varepsilon(2\omega), \qquad (2.3.2)$$

ou encore

$$\delta_1 = \delta_2 \equiv \delta. \qquad (2.3.3)$$

Une telle supposition est justifiée pour des diélectriques transparents faiblement dispersifs. Dans un tel cas il est commode d'introduire, au lieu de a_1 et a_2, les amplitudes u_1 et u_2, et au lieu de la variable z, la variable ξ [6]:

$$u_{1,2} = a_{1,2}\exp(\delta z); \quad \xi = [1 - \exp(-\delta z)]/\delta. \qquad (2.3.4)$$

Remarquons que u a les mêmes dimensions que celles de a, ξ a les dimensions d'une longueur. En utilisant (2.3.4) et (2.3.3), on peut

mettre le système d'équations (2.3.1) sous la forme

$$\boxed{\begin{aligned} &du_1/d\xi + \sigma_1 u_1 u_2 \sin\Psi = 0;\\ &du_2/d\xi - \sigma_2 u_1^2 \sin\Psi = 0;\\ &d\Psi/d\xi + (2\sigma_1 u_2 - \sigma_2 u_1^2/u_2)\cos\Psi = 0.\end{aligned}} \qquad (2.3.5)$$

Le système (2.3.5) se ramène au système (2.3.1) si dans ce dernier on pose $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Ceci signifie qu'on peut résoudre le même système d'équations tronquées (2.3.5) par rapport à $u_1(\xi)$, $u_2(\xi)$, $\Psi(\xi)$ aussi bien *en l'absence* de pertes liées à l'absorption linéaire qu'*en présence* de pertes (à condition que $\delta_1 = \delta_2$). Si les pertes sont nulles, dans les solutions obtenues il convient de poser $u_{1,2} = a_{1,2}$, $\xi = z$. En présence de pertes, dans les solutions obtenues il faut effectuer la substitution (2.3.4): $u = a\exp(\delta z)$, $\xi = [1 - \exp(-\delta z)]/\delta$. Ainsi, dans le cas où la condition de synchronisme est exactement satisfaite et la dispersion de l'absorption est nulle, on arrive à tenir compte des pertes linéaires en résolvant les équations tronquées sans pertes et en effectuant ensuite le changement correspondant des variables dans le résultat final.

En multipliant par $\sigma_2 u_1$ la première et par $\sigma_1 u_2$ la deuxième des équations du système (2.3.5) et en les additionnant, on obtient

$$\sigma_2 u_1 (du_1/d\xi) + \sigma_1 u_2 (du_2/d\xi) = 0$$

ou encore

$$\frac{d}{d\xi}(\sigma_2 u_1^2 + \sigma_1 u_2^2) = 0. \qquad (2.3.6)$$

On en conclut que pour tout ξ la somme $\sigma_2 u_1^2(\xi) + \sigma_1 u_2^2(\xi)$ est *constante*. En notant cette constante par $\sigma_1 U^2$, écrivons

$$\sigma_2 u_1^2(\xi) + \sigma_1 u_2^2(\xi) = \sigma_1 U^2. \qquad (2.3.7)$$

La constante $\sigma_1 U^2$ peut être exprimée en fonction des amplitudes à la frontière du milieu non linéaire (pour $\xi = 0$ et donc pour $z = 0$):

$$\sigma_1 U^2 = \sigma_1 u_1^2(0) + \sigma_2 u_2^2(0). \qquad (2.3.8)$$

En faisant usage de (2.3.7), éliminons $u_1(\xi)$ entre les équations (2.3.5). Il vient

$$\left.\begin{aligned} &du_2/d\xi = \sigma_1 (U^2 - u_2^2)\sin\Psi;\\ &d\Psi/d\xi = (\sigma_1/u_2)(U^2 - 3u_2^2)\cos\Psi.\end{aligned}\right\} \qquad (2.3.9)$$

D'où on tire

$$d\Psi/du_2 = [(U^2 - 3u_2^2)/u_2(U^2 - u_2^2)]\operatorname{ctg}\Psi. \qquad (2.3.10)$$

Vu que $d\Psi = -d\cos\Psi/\sin\Psi$, récrivons (2.3.10) sous la forme

$$-d\cos\Psi/du_2 = [(U^2 - 3u_2^2)/u_2(U^2 - u_2^2)]\cos\Psi. \qquad (2.3.11)$$

Il est aisé de s'assurer que l'équation (2.3.11) comporte la solution

suivante:

$$\cos \Psi = C/u_2 (U^2 - u_2^2), \qquad (2.3.12)$$

où C est une constante d'intégration. En tenant compte de (2.3.7), récrivons (2.3.12) sous la forme suivante:

$$\cos \Psi = C\sigma_1/\sigma_2 u_1^2 u_2. \qquad (2.3.13)$$

Utilisons (2.3.13) pour exprimer la constante d'intégration C en fonction des valeurs aux limites des amplitudes et de la phase:

$$C = (\sigma_2/\sigma_1)\, u_1^2 (0)\, u_2 (0) \cos \Psi (0). \qquad (2.3.14)$$

En réunissant les résultats ainsi obtenus, écrivons les expressions pour les intégrales première et seconde du système (2.3.5):

$$\boxed{(\sigma_2/\sigma_1)\, u_1^2 (\xi) + u_2^2 (\xi) = (\sigma_2/\sigma_1)\, u_1^2 (0) + u_2^2 (0) = U^2,} \qquad (2.3.15a)$$

$$\boxed{u_1^2 (\xi)\, u_2 (\xi) \cos \Psi (\xi) = u_1^2 (0)\, u_2 (0) \cos \Psi (0).} \qquad (2.3.15b)$$

Portrait de phase du processus de génération de deuxième harmonique dans le cas où la condition de synchronisme est exactement satisfaite. — Considérons le *plan de phase* en coordonnées polaires u_2, Ψ; les coordonnées cartésiennes rectangulaires étant représentées ici par $u_2 \cos \Psi$ et $u_2 \sin \Psi$. En un point ξ du milieu non linéaire (à la distance $z(\xi)$ du plan d'entrée) l'amplitude du deuxième harmonique est $u_2(\xi)$ et la phase généralisée est $\Psi(\xi)$. A ces deux paramètres correspond un *point représentatif* A_ξ dans le plan de phase (fig. 2.7). Au fur et à mesure que les ondes lumineuses interagissantes se propagent dans le milieu non linéaire (c'est-à-dire à mesure que ξ augmente), le point représentatif se déplace dans le plan de phase en décrivant une courbe appelée *trajectoire de phase*. Suivant les conditions aux limites (c'est-à-dire suivant les valeurs de $u_2(0)$ et $\Psi(0)$ à l'entrée du milieu) le point représentatif décrit des trajectoires différentes. L'ensemble des trajectoires de phase constitue le *portrait de phase* du processus.

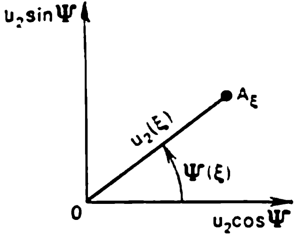


Fig. 2.7

La fig. 2.8 montre le portrait de phase de la génération de deuxième harmonique en cas de réalisation exacte de la condition de synchronisme dans un milieu semi-infini non absorbant [1]) et non liné-

[1]) Comme nous l'avons vu plus haut, dans un milieu non absorbant $u = a$ et $\xi = z$; mais nous utiliserons les notations u et ξ.

aire à l'approximation des ondes planes. Analysons ce portrait de phase [5].

Supposons que les conditions aux limites correspondent au point O ($u_2(0) = 0$). Ceci signifie qu'à l'entrée du milieu non linéaire

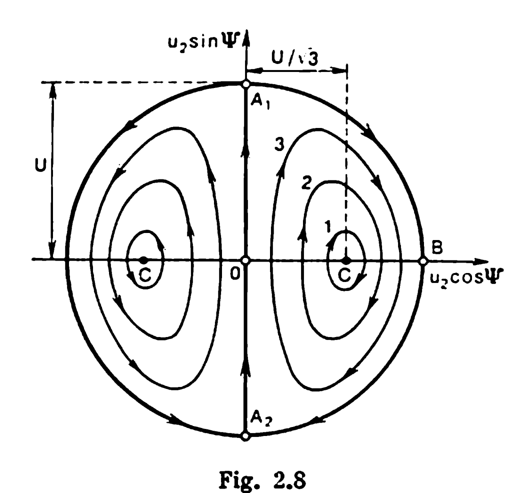


Fig. 2.8

le deuxième harmonique est nul. En vertu de (2.3.15a) on a $u_1(0) = U\sqrt{(\sigma_1/\sigma_2)}$. La relation (2.3.15b) donne pour le cas considéré

$$u_1^2(\xi)\, u_2(\xi) \cos\Psi(\xi) = 0. \tag{2.3.16}$$

Les amplitudes u_1 et u_2 au voisinage du point O ne peuvent pas être nulles [$u_1(0)$ est maximale; u_2 n'est nulle qu'au point O du plan de phase]. Par conséquent, de (2.3.16) il résulte que la trajectoire de phase passant par le point O se décrit par l'équation suivante:

$$\cos\Psi(\xi) = 0. \tag{2.3.17}$$

C'est un segment de droite A_1A_2 de la fig. 2.8. Remarquons qu'aux extrémités de ce segment (aux points A_1 et A_2) correspond la situation limite lorsque $u_2 = U$ et donc [en vertu de (2.3.15a)] $u_1 = 0$.

Supposons maintenant que les conditions aux limites correspondent au point B: $u_2(0) = U$; $\Psi = 0$ [de (2.3.15a) il résulte que $u_1(0) = 0$]. Ceci signifie que seul le deuxième harmonique agit à l'entrée du milieu non linéaire. Il est clair que dans ce cas la relation (2.3.16) est vérifiée. Dans ces conditions, ni u_2, ni $\cos\Psi$ ne peuvent être nuls; par conséquent, $u_1(\xi) = 0$ ou, compte tenu de (2.3.15a),

$$u_2(\xi) = U. \tag{2.3.18}$$

La relation (2.3.18) décrit une circonférence de rayon U, passant par le point B.

Ainsi, nous avons mis en évidence deux trajectoires de phase: un segment de droite et une circonférence. Elles sont portées en traits forts sur la fig. 2.8.

Le système (2.3.9) admet une solution stationnaire (au sens spatial). Si l'on pose $du_2/d\xi = 0$ et $d\Psi/d\xi = 0$, on obtient

$$\sin \Psi = 0; \quad u_2 = U/\sqrt{3}. \tag{2.3.19}$$

Dans le plan de phase, à cette solution correspondent deux points: $u_2 = U/\sqrt{3}$; $\Psi = 0$ et $u_2 = U/\sqrt{3}$; $\Psi = \pi$. Sur la fig. 2.8 ce sont des points C. On les appelle *centres de phase.*

Si, à l'entrée du milieu non linéaire, le deuxième harmonique est au point C, il restera en ce point par la suite. Dans ce cas les amplitudes u_1 et u_2 sont constantes, de même que la phase Ψ, suivant la longueur du milieu non linéaire [1]). De (2.3.19) et (2.3.15a) il s'ensuit que

$$u_2/u_1 = \sqrt{\sigma_2/2\sigma_1}. \tag{2.3.20}$$

La fig. 2.8 montre en traits fins les trajectoires de phase qui contournent un centre correspondant; ce sont des trajectoires *fermées* (v. courbes *1*, *2*, *3* de la figure). A ces trajectoires de phase correspondent des *fluctuations spatiales* tant de l'amplitude u_2 que de l'amplitude u_1. Ces fluctuations deviennent de plus en plus profondes lorsque le numéro de la trajectoire augmente.

Les trajectoires de phase dessinées en traits forts sur la fig. 2.8 délimitent des régions du plan de phase à centres différents. L'ensemble de telles lignes est appelé *séparatrice* (trajectoire de phase séparatrice). Les points A_1 et A_2 de la séparatrice sont appelés *points selles.*

Remarques sur le portrait de phase. — Soit $u_2(0) = 0$. Au fur et à mesure que le deuxième harmonique se propage dans le milieu non linéaire, son amplitude s'accroît en se rapprochant de U; dans ces conditions, le point représentatif se déplacera suivant une droite verticale $\cos \Psi(\xi) = 0$ depuis le point O vers le point A_1 (autrement dit, le point représentatif suivra le tronçon OA_1 de la séparatrice). Faisons à ce propos trois remarques.

Premièrement, le déplacement du point représentatif suivant la portion OA_1 de la séparatrice correspond à l'accumulation spatiale la plus rapide de l'effet de génération de deuxième harmonique. Dans ce cas $\sin \Psi = 1$, et comme le montre la deuxième équation (2.3.5), la dérivée $du_2/d\xi$ est positive et maximale. Remarquons également

[1]) Ce sont des ondes non linéaires spatialement stationnaires. De telles ondes sont caractéristiques de la mécanique des fluides cosmique ainsi que de la hémodynamique (dynamique du sang dans les vaisseaux). Souvent les ondes stationnaires se caractérisent par un profil stationnaire qui se propage dans le milieu non linéaire sans varier (ondes solitons ou solitons tout court).

que pour arriver sur le tronçon OA_1 de la séparatrice la réalisation de la condition $u_2(0) = 0$ n'est pas nécessaire; il suffit que soit satisfaite la condition $\Psi(0) = \pi/2$. Cette dernière circonstance présente de l'importance pratique pour la génération de deuxième harmonique dans deux cristaux non linéaires placés l'un après l'autre. La condition $u_1(0) = 0$ est réalisée à l'entrée du premier cristal mais ne l'est pas à l'entrée du second. Dans ce cas on peut assurer la réalisation de la condition $\Psi(0) = \pi/2$ à l'entrée du second cristal par un choix convenable de la phase dans l'intervalle entre les cristaux.

Deuxièmement, lors du mouvement le long du tronçon OA_1 de la séparatrice, le point représentatif ne peut pratiquement pas

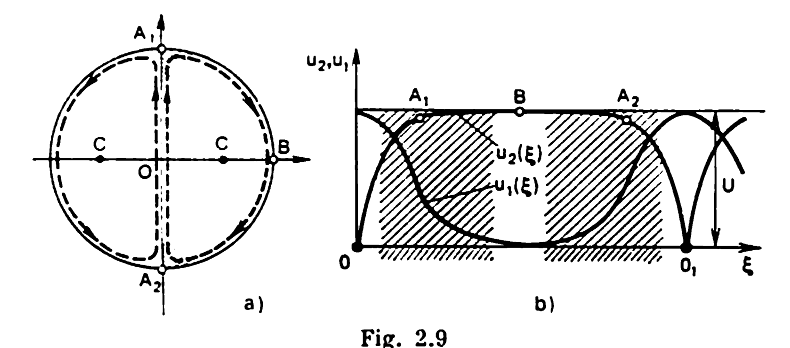


Fig. 2.9

atteindre le point selle A_1. Pour cela le milieu non linéaire devrait avoir en toute rigueur une longueur infiniment grande. Autrement dit, le point représentatif pourrait arriver au point A_1 seulement lorsque $\xi \to \infty$. On peut dire que plus près du point A_1 s'approche le point représentatif lors du déplacement suivant la séparatrice OA_1, plus petite devient sa vitesse de mouvement.

Troisièmement, en pratique, à cause de l'instabilité le mouvement du point représentatif ne se réalise pas rigoureusement suivant la séparatrice OA_1. L'action de divers facteurs aléatoires a pour résultat que le point représentatif *quitte* la droite verticale $\cos \Psi = 0$ pour se placer sur l'une des trajectoires de phase fermées situées près de cette droite (v. trajectoires en traits interrompus de la fig. 2.9, *a*). Le passage du point représentatif sur une trajectoire fermée est également favorisé par le fait que l'amplitude du deuxième harmonique sur la surface d'un cristal non linéaire n'est pratiquement jamais nulle. Il en résultera des fluctuations des amplitudes u_2 et u_1. Ces pulsations, correspondant à la trajectoire portée en traits interrompus sur la fig. 2.9, *a*, sont montrées à la fig. 2.9, *b*. Il est à noter que le point représentatif passe les portions de la trajectoire de phase rapidement au voisinage des points O et B et lentement

au voisinage des points A_1 et A_2. Les tronçons relativement longs hachurés le long de l'axe ξ, montrés sur la fig. 2.9, *b*, correspondent approximativement aux portions hachurées du plan de phase de la fig. 2.9, *a*.

Cas où le deuxième harmonique est nul à l'entrée du milieu non linéaire. — Considérons une situation idéale: le point représentatif

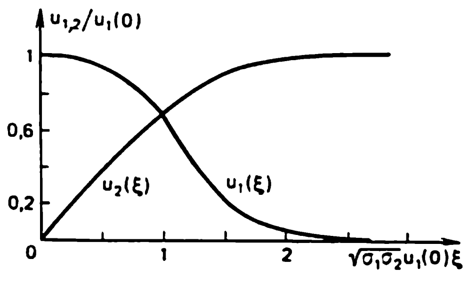


Fig. 2.10

se déplace sur le tronçon OA_1 de la séparatrice. Dans ce cas $\Psi = \pi/2$ et donc $\sin \Psi = 1$. La première des équations (2.3.9) prend alors la forme

$$du_2/d\xi = \sigma_1 (U^2 - u_2^2). \tag{2.3.21}$$

La solution de l'équation (2.3.21) satisfaisant à la condition à la limite $u_2(0) = 0$ peut s'exprimer en fonction d'une tangente hyperbolique [1]:

$$u_2(\xi) = U \operatorname{th} (\sigma_1 U \xi). \tag{2.3.22}$$

Comme $U = u_1(0) \sqrt{\sigma_2/\sigma_1}$, récrivons (2.3.22) sous la forme

$$\boxed{u_2(\xi) = u_1(0) \sqrt{\sigma_2/\sigma_1} \operatorname{th} (\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, u_1(0)\, \xi).} \tag{2.3.23}$$

En se servant de (2.3.15a), on en déduit l'expression pour l'amplitude de l'onde fondamentale $u_1(\xi)$:

$$\boxed{u_1(\xi) = u_1(0)/\operatorname{ch} (\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, u_1(0)\, \xi).} \tag{2.3.24}$$

Les résultats (2.3.23) et (2.3.24) sont indiqués sur la fig. 2.10. Un transfert efficace de la puissance de l'onde fondamentale au deuxième harmonique s'effectue sur une longueur de l'ordre de

$$L = [\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, u_1(0)]^{-1}, \tag{2.3.25}$$

[1]) Rappelons: la tangente hyperbolique $\operatorname{th} x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$; $d \operatorname{th} x/dx = 1/\operatorname{ch}^2 x$; $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$ (cosinus hyperbolique).

ce qui correspond en pratique à quelques centimètres. Dans le cas considéré, le transfert de la puissance au deuxième harmonique est un processus *irréversible*; en toute rigueur, pour que toute la puissance soit transmise, il faut que $\xi \to \infty$. Or, un transfert pratiquement complet de la puissance se produit déjà sur un trajet égal à plusieurs longueurs L.

Le caractère irréversible du transfert de puissance au deuxième harmonique suppose que le point représentatif suit exactement la séparatrice OA_1. Or, ainsi qu'on l'a dit plus haut, en réalité le point représentatif ne se maintient pas sur la séparatrice mais passe sur une trajectoire de phase fermée. Il en résulte un changement qualitatif du processus de transfert de puissance: le processus devient *réversible* (les amplitudes u_2 et u_1 commencent à pulser; v. fig. 2.9, *b*). Les courbes de la fig. 2.10 traduisent d'une façon approchée le processus de pulsation des amplitudes au voisinage des points O et O_1, représenté sur la fig. 2.9, *b*.

Cas général. — En passant à l'étude du cas général correspondant à des conditions aux limites quelconques, reportons (2.3.12) dans la première des équations (2.3.9); il vient:

$$u_2\, du_2/d\xi = \pm \sigma_1 \sqrt{u_2^2 (U^2 - u_2^2) - C^2} \qquad (2.3.26)$$

[les signes plus ou moins sont à choisir suivant le signe du sinus figurant dans (2.3.9)]. Introduisons les désignations: $y = (u_2/U)^2$, $x = \sigma_1 U \xi$, $C_1 = C^2/U^6$. Avec ces notations, la relation (2.3.26) s'écrit sous la forme

$$dy/dx = \pm 2 \sqrt{y (1 - y^2) - C_1}. \qquad (2.3.27)$$

Ainsi,

$$x = \pm \frac{1}{2} \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{y (1-y)^2 - C_1}}. \qquad (2.3.28)$$

Soient y_1, y_2, y_3 les racines de l'équation

$$y (1-y)^2 - C_1 = 0. \qquad (2.3.29)$$

On se rend compte sans peine que pour $0 < C_1 < 4/27$ toutes les racines sont réelles et positives. En supposant que les inégalités indiquées sont vérifiées et que $y_1 < y_2 < y_3$, récrivons (2.3.28) sous la forme

$$x = \pm \frac{1}{2} \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}} =$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{y_3 - y_1}} \int_{\tau(0)}^{\tau(x)} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-f^2\tau^2)}}, \qquad (2.3.30)$$

où $\tau^2 = (y - y_1)/(y_2 - y_1)$; $f^2 = (y_2 - y_1)/(y_3 - y_1)$. La fonction $u_2^2(\xi)$ définie par la relation (2.3.30) s'exprime par la fonction elliptique de Jacobi, c'est-à-dire par le sinus elliptique (v. [12]):

$$u_2^2(\xi)/U^2 = y_1 + (y_2 - y_1)\, \mathrm{sn}^2 [U \sqrt{y_3 - y_1} (\xi + \xi_0)], \qquad (2.3.31)$$

où ξ_0 se détermine par les conditions aux limites. Dans le cas particulier de $u_2(0) = 0$, on a $\xi_0 = 0$, $C = 0$ (et par conséquent, $y_1 = 0$, $y_2 = y_3 = 1$), $U = u_1(0)\sqrt{\sigma_2/\sigma_1}$, ce qui conduit finalement à (2.3.23).

Prise en compte de l'absorption. — Comme il a été dit précédemment, lorsque la condition (2.3.3) est satisfaite, les pertes linéaires peuvent être prises en compte par changement des variables (2.3.4) dans les expressions finales. La solution (2.3.23) prend alors la forme suivante:

$$a_2(z) = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}\, a_1(0)\, e^{-\delta z}\, \mathrm{th}\left[\frac{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}{\delta}\, a_1(0)\,(1 - e^{-\delta z})\right]. \qquad (2.3.32)$$

La fonction $a_2(z)$ décrite par l'expression (2.3.32) est une fonction monotone de la distance z. L'amplitude du deuxième harmonique passe par son maximum à la distance z_{max} déterminée à partir de la condition $da_2/dz = 0$. De (2.3.32) il s'ensuit que z_{max} est solution de l'équation transcendante

$$\mathrm{sh}\left[\frac{2}{\delta}\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, a_1(0)\,(1 - e^{-\delta z})\right] = \frac{2}{\delta}\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, a_1(0)\, e^{-\delta z}. \qquad (2.3.33)$$

Pour $\delta z \ll 1$ cette équation prend une forme plus simple

$$\mathrm{sh}\,(2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, a_1(0)\, z) = 2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, a_1(0)/\delta,$$

d'où on déduit que

$$z_{max} = [2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, a_1(0)]^{-1}\, \mathrm{Arsh}\,(2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, a_1(0)/\delta). \qquad (2.3.34)$$

Dans le cas où l'absorption est sujette à la dispersion ($\delta_1 \neq \delta_2$), le système (2.3.5) ne peut être résolu que par intégration numérique sur ordinateur.

§ 2.4. Résolution des équations tronquées en présence d'un désaccord d'onde

Intégrales du système d'équations tronquées en présence d'un désaccord d'onde et en l'absence d'atténuation. — En posant $\delta_1 = \delta_2 = 0$, mettons le système d'équations tronquées (2.2.28) sous la forme

$$\begin{aligned} &da_1/dz + \sigma_1 a_1 a_2 \sin\Psi = 0;\\ &da_2/dz - \sigma_2 a_1^2 \sin\Psi = 0;\\ &d\Psi/dz - \Delta k + (2\sigma_1 a_2 - \sigma_2 a_1^2/a_2)\cos\Psi = 0. \end{aligned} \qquad (2.4.1)$$

Les deux premières équations du système (2.4.1) sont les mêmes que les équations du système (2.3.5). De ce fait l'expression de l'intégrale première du système (2.4.1) est analogue à l'expression (2.3.15a):

$$(\sigma_2/\sigma_1)\, a_1^2(z) + a_2^2(z) = (\sigma_2/\sigma_1)\, a_1^2(0) + a_2^2(0) = U^2. \qquad (2.4.2)$$

Pour obtenir l'intégrale seconde, effectuons sur le système (2.4.1) les mêmes opérations que celles faites précédemment sur le système (2.3.5). En faisant usage de (2.4.2), éliminons $a_1(z)$ entre les équations du système (2.4.1); il vient

$$\left.\begin{aligned} da_2/dz &= \sigma_1 (U^2 - a_2^2) \sin \Psi ; \\ d\Psi/dz &= \Delta k + (\sigma_1/a_2)(U^2 - 3a_2^2) \cos \Psi . \end{aligned}\right\} \tag{2.4.3}$$

D'où l'on tire

$$-\frac{d}{da_2} \cos \Psi = \frac{(U^2 - 3a_2^2) \cos \Psi + a_2 \Delta k/\sigma_1}{a_2 (U^2 - a_2^2)} . \tag{2.4.4}$$

Il est aisé de s'assurer que l'équation (2.4.4) a pour solution

$$\cos \Psi = [C' - (a_2^2 \Delta k/2\sigma_1)]/a_2 (U^2 - a_2^2), \tag{2.4.5}$$

où C' est une constante d'intégration.

Utilisons les désignations suivantes:

$$\Delta_1 = \Delta k/2\sigma_1 U ; \quad v_{1,2}(z) = a_{1,2}(z)/U ;$$
$$C_2 = C'/U^3. \tag{2.4.6}$$

La quantité Δ_1 est appelée *désaccord réduit*. Avec les nouvelles notations l'équation (2.4.5) prend la forme

$$\cos \Psi = (C_2 - \Delta_1 v_2^2)/v_2 (1 - v_2^2). \tag{2.4.7}$$

En se servant de (2.4.7), on peut exprimer la constante C_2 par les valeurs aux limites $v_2(0)$, $\Psi(0)$ et le désaccord réduit Δ_1:

$$C_2 = v_2(0) [1 - v_2^2(0)] \cos \Psi(0) + \Delta_1 v_2^2(0). \tag{2.4.8}$$

Ainsi, les intégrales du système considéré d'équations tronquées peuvent être représentées, compte tenu de (2.4.6), sous la forme

$$\boxed{(\sigma_2/\sigma_1) v_1^2(z) + v_2^2(z) = (\sigma_2/\sigma_1) v_1^2(0) + v_2^2(0) = 1 ;} \tag{2.4.9a}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &v_2(z) [1 - v_2^2(z)] \cos \Psi(z) + \Delta_1 v_2^2(z) = \\ &= v_2(0) [1 - v_2^2(0)] \cos \Psi(0) + \Delta_1 v_2^2(0). \end{aligned}} \tag{2.4.9b}$$

Portrait de phase du processus de génération de deuxième harmonique dans le cas d'un désaccord d'onde. — En tant que coordonnées polaires du plan de phase on utilise les coordonnées v_2 et Ψ. La famille de trajectoires de phase se décrit par l'équation (2.4.7); la constante C_2 est déterminée par les conditions aux limites et par le désaccord réduit Δ_1 conformément à (2.4.8)

Le portrait de phase du processus considéré est représenté, pour une certaine valeur fixée du désaccord réduit Δ_1 ($0 < \Delta_1 < 1$) sur

la fig. 2.11. Les lignes en traits forts montrent la *séparatrice*. Elle est constituée par un cercle de centre à l'origine des coordonnées et de rayon égal à l'unité et par un segment de droite A_1A_2; les points A_1 et A_2 sont des *points selles*. La droite A_1A_2 coupe l'axe $v_2 \cos \Psi$ au point O_1; les coordonnées de ce point: $v_2 = \Delta_1$, $\Psi = 0$. Les *centres* de phase C_1 et C_2 ont pour coordonnées respectives

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= (\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 + 3})/3\,; \quad \Psi = 0\,; \\ v_2 &= (\Delta_1 - \sqrt{\Delta_1^2 + 3})/3\,; \quad \Psi = \pi. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.10)$$

Le résultat (2.4.10) découle de (2.4.3) si l'on tient compte de (2.4.6) et pose $dv_2/dz = 0$ et $d\Psi/dz = 0$ (rappelons qu'aux centres de phase

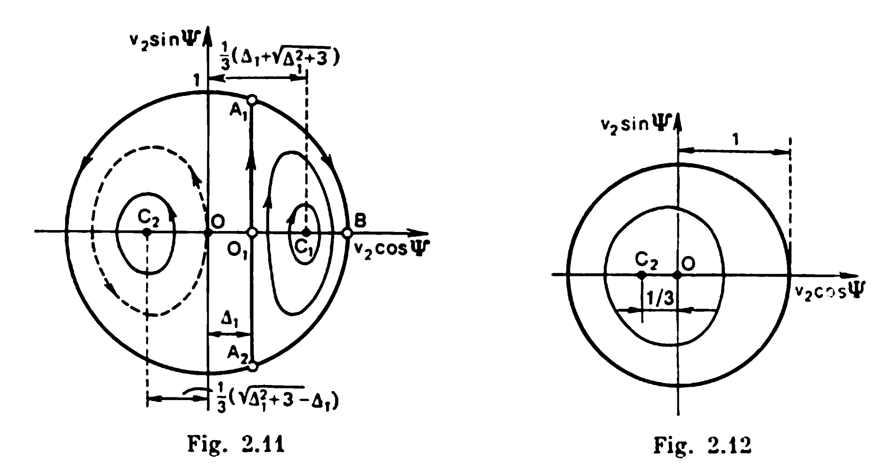


Fig. 2.11 Fig. 2.12

correspondent des ondes non linéaires spatialement stationnaires)

Supposons que $v_2(0) = 1$, $\Psi(0) = 0$ (conditions aux limites correspondant au point B de la figure). Il résulte de (2.4.9b) que

$$v_2(z)\,[1 - v_2^2(z)] \cos \Psi(z) + \Delta_1 v_2^2(z) = \Delta_1$$

ou

$$[1 - v_2^2(z)]\,[v_2(z) \cos \Psi(z) - \Delta_1] = 0. \qquad (2.4.11)$$

Le deuxième facteur au premier membre de (2.4.11) ne peut être nul au voisinage du point B; par conséquent,

$$v_2^2(z) = 1.$$

C'est l'équation d'une circonférence de rayon unité et de centre au point O.

Supposons maintenant que $v_2(0) = \Delta_1$, $\Psi(0) = 0$ (conditions aux limites correspondant au point O_1). On déduit de (2.4.9b) que dans ce cas aussi la relation (2.4.11) est valable. Pourtant ici, c'est

le premier terme au premier membre de (2.4.11) qui n'est pas nul. Ainsi,

$$v_2(z) \cos \Psi(z) = \Delta_1. \qquad (2.4.12)$$

C'est l'équation d'une droite verticale passant par le point O_1.

Comparons les fig. 2.11 et 2.8. En l'absence de désaccord d'onde, le portrait de phase est symétrique par rapport aux axes $v_2 \cos \Psi$ et $v_2 \sin \Psi$. En présence de désaccord d'onde, la symétrie du portrait de phase par rapport à l'axe $v_2 \sin \Psi$ disparaît. Maintenant, le tronçon rectiligne de la séparatrice ne se confond plus avec l'axe $v_2 \sin \Psi$ mais s'écarte d'elle d'une distance $|\Delta_1|$ (vers la droite ou vers la gauche); quant à la circonférence limitatrice, elle reste inchangée.

Pour que deux centres de phase existent à l'intérieur de la circonférence il faut que soit réalisée la condition $|\Delta_1| < 1$. Si $|\Delta_1| \geqslant 1$, un seul centre de phase se trouve à l'intérieur de la circonférence. La fig. 2.12 montre le portrait de phase pour $\Delta_1 = 1$.

Mouvement du point représentatif sur le tronçon rectiligne de la séparatrice. — Supposons que les conditions aux limites correspondent au point O_1 de la fig. 2.11. Dans ce cas, le point représentatif se déplacera suivant la droite verticale de O_1 vers A_1. En se servant de (2.4.12) et en tenant compte de (2.4.6), récrivons la première équation du système (2.4.3) sous la forme

$$dv_2/dz = \sigma_1 U (1 - v_2^2) \sqrt{1 - (\Delta_1/v_2)^2},$$

ou encore

$$dv_2^2/dz = 2\sigma_1 U (1 - v_2^2) \sqrt{v_2^2 - \Delta_1^2}. \qquad (2.4.13)$$

La solution de cette équation satisfaisant à la condition $v_2^2(0) = \Delta_1^2$ est de la forme

$$v_2^2(z) = \Delta_1^2 + (1 - \Delta_1^2) \operatorname{th}^2 (\sigma_1 U \sqrt{1 - \Delta_1^2} z). \qquad (2.4.14)$$

Pour $\Delta_1 = 0$, on déduit de (2.4.14) une solution correspondant au résultat (2.3.22). Comme le montre l'expression (2.4.14), lors de son mouvement le long de la séparatrice, le point représentatif ne pourrait arriver au point selle A_1 qu'à la limite lorsque $z \to \infty$. Mentionnons pour terminer que de même que dans le cas où $\Delta_1 = 0$ le mouvement du point représentatif suivant la droite est instable.

Cas où le deuxième harmonique est nul à l'entrée du milieu non linéaire. — Supposons que $v_2(0) = 0$. Pour $\Delta_1 \neq 0$ le cas considéré correspond au mouvement du point représentatif suivant une certaine trajectoire de phase fermée passant par le point O de la fig. 2.11 (cette trajectoire est portée en traits interrompus). Portant la valeur $v_2(0) = 0$ dans (2.4.9b), on obtient l'équation de cette trajectoire:

$$\cos \Psi = -\Delta_1 v_2/(1 - v_2^2). \qquad (2.4.15)$$

En faisant usage de (2.4.15) et (2.4.6), mettons la première des équations du système (2.4.3) sous la forme

$$dv_2/dz = \pm \sigma_1 U \sqrt{1-(2+\Delta_1^2)\,v_2^2 + v_2^4} \qquad (2.4.16)$$

(le signe plus ou moins est choisi suivant le signe de sin Ψ). Si l'on élève au carré les deux membres de l'équation (2.4.16), on obtient

$$(dv_2/dz)^2 = \sigma_1^2 U^2 \,[1-(2+\Delta_1^2)\,v_2^2 + v_2^4]. \qquad (2.4.16a)$$

Introduisons une fonction

$$V_2(u) = v_2(z)/\sqrt{\varkappa}, \qquad (2.4.17)$$

où

$$\sqrt{\varkappa} = \sqrt{1+(\Delta_1/2)^2} - \Delta_1/2\,; \quad u = z\sigma_1 U/\sqrt{\varkappa}. \qquad (2.4.18)$$

Avec les nouvelles notations l'équation (2.4.16a) prend la forme

$$\left(\frac{d}{du} V_2(u)\right)^2 = [1-V_2^2(u)]\,[1-\varkappa^2 V_2^2(u)]. \qquad (2.4.19)$$

C'est une équation différentielle pour le *sinus elliptique de Jacobi* sn $(u\,;\,\varkappa)$ [9]. Ainsi,

$$v_2(z) = \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}\,(u\,;\,\varkappa). \qquad (2.4.20)$$

Le paramètre $\varkappa$ (et donc la variable u) s'exprime par le désaccord réduit Δ_1. En utilisant (2.4.18) il n'est pas difficile d'obtenir

$$\Delta_1 = (1-\varkappa)/\sqrt{\varkappa}. \qquad (2.4.21)$$

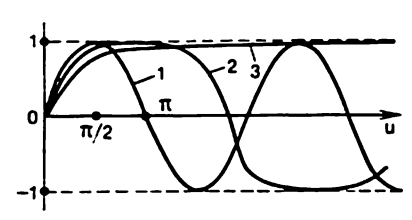


Fig. 2.13

Le sinus elliptique de Jacobi sn $(u\,;\,\varkappa)$ est une fonction périodique de u dont la période est égale à $4K$,

$$K = \int_0^1 [(1-y^2)\,(1-\varkappa^2 y^2)]^{-1/2}\,dy \qquad (2.4.22)$$

étant l'intégrale elliptique complète de 1ère espèce. Pour $\varkappa = 0$, le sinus elliptique de Jacobi se transforme en sinus ordinaire, et pour $\varkappa = 1$, en tangente hyperbolique:

$$\mathrm{sn}\,(u\,;\,0) = \sin u\,; \qquad \mathrm{sn}\,(u\,;\,1) = \mathrm{th}\,u. \qquad (2.4.23)$$

La fig. 2.13 montre trois graphiques: *1*: sn $(u\,;\,0) = \sin u$; 2: sn $(u\,;\,\varkappa)$ pour une certaine valeur de $\varkappa$ comprise à l'intérieur de l'intervalle [0; 1]; 3: sn $(u\,;\,1)$ =

$= \text{th}\, u$. Remarquons que $\text{sn}\,(2nK;\ \varkappa) = 0$ et $\text{sn}\,((4n+1)\,K;\ \varkappa) = 1$ (pour $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$).

Lorsque la condition de synchronisme est exactement satisfaite, $\varkappa = 1$. Dans ce cas on a

$$v_2(z) = \text{sn}\,(u;\ 1) = \text{th}\,(\sigma_1 U z). \qquad (2.4.24)$$

Le résultat (2.4.24) est en accord avec (2.3.22).

Supposons qu'il existe un désaccord d'onde important: $\Delta_1 \gg 1$ ($\Delta k \gg 2\sigma_1 U$). Ceci signifie que les ondes se propagent dans une

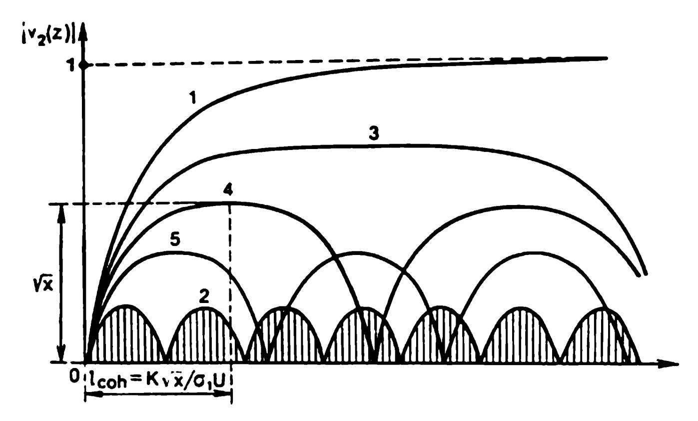


Fig. 2.14

direction éloignée de celle de synchronisme. La relation (2.4.18) donne pour un tel cas

$$\sqrt{\varkappa} \approx (\Delta_1/2)\,(1 + 2/\Delta_1^2) - \Delta_1/2 = 1/\Delta_1 \qquad (2.4.25)$$

et donc

$$v_2(z) \cong \sqrt{\varkappa}\, \text{sn}\,(z\sigma_1 U/\sqrt{\varkappa}\,;\ 0) \cong \sin\,(z\sigma_1 U \Delta_1)/\Delta_1.$$

Ainsi, dans le cas d'un fort désaccord on peut considérer que

$$v_2(z) = \frac{2\sigma_1 U}{\Delta k} \sin \frac{\Delta k z}{2} = \sigma_1 U z\, \text{sinc}\, \frac{\Delta k z}{2} \qquad (2.4.26)$$

(rappelons que $\text{sinc}\, X = \sin X / X$).

Les courbes de la fonction $|\, v_2(z)\, |$ pour différentes valeurs de Δ_1 sont représentées sur la fig. 2.14 (cf. fig. 2.13). La courbe *1* est obtenue pour $\Delta_1 = 0$ [relation (2.4.24)], et la courbe *2*, pour $\Delta_1 \gg 1$ [relation (2.4.26)]. Les courbes *3*, *4* et *5* illustrent des situations intermédiaires correspondant aux valeurs du désaccord réduit $\Delta_1^{(3)}$, $\Delta_1^{(4)}$, $\Delta_1^{(5)}$ respectives telles que $\Delta_1^{(3)} < \Delta_1^{(4)} < \Delta_1^{(5)}$. Soulignons que $\sqrt{\varkappa}$ est la valeur maximale de l'amplitude du deuxième harmonique pour

un désaccord Δ_1 donné

$$v_{2\,max} = \sqrt{\varkappa} = \sqrt{1+(\Delta_1/2)^2} - \Delta_1/2. \qquad (2.4.27)$$

Comme le montre cette figure, pour $\Delta_1 \neq 0$, il se produit des battements spatiaux. Lorsque le désaccord augmente, l'amplitude des battements diminue alors que la fréquence spatiale s'accroît.

Nous appellerons *longueur de cohérence* la distance l_{coh} égale à un quart de période de la fonction sn $(z\sigma_1 U/\sqrt{\varkappa}\,;\ \varkappa)$. Sur la distance l_{coh} il se produit d'abord le transfert de la puissance de l'onde fondamentale au deuxième harmonique ; ensuite, sur une même distance il se produit un transfert de la puissance dans le sens inverse. La période de la fonction sn $(u\,;\ \varkappa)$ étant égale à $4K$, on peut écrire

$$l_{coh}\sigma_1 U/\sqrt{\varkappa} = K.$$

D'où

$$l_{coh} = K\sqrt{\varkappa}/\sigma_1 U. \qquad (2.4.28)$$

Pour $\Delta_1 \gg 1$, nous userons du résultat (2.4.25). En tenant compte que dans ce cas $K = \pi/2$, on obtient

$$l_{coh} = \pi/\Delta k. \qquad (2.4.29)$$

Approximation du champ constant de rayonnement fondamental. — Supposons que l'amplitude du deuxième harmonique du champ soit *très petite* pour tous les z, c'est-à-dire sur toute la longueur du milieu non linéaire :

$$v_2(z) \ll 1. \qquad (2.4.30a)$$

Dans un tel cas on peut étudier la génération de deuxième harmonique d'une façon approchée en supposant que pour tous les z l'amplitude du champ de l'onde fondamentale est constante (pour $\delta = 0$) :

$$v_1(z) = v_1(0) = \sqrt{\sigma_1/\sigma_2}. \qquad (2.4.30b)$$

Une telle approximation est appelée *approximation du champ constant du rayonnement fondamental*. Dans cette approximation la relation (2.4.20) prend la forme

$$v_2(z) = \sigma_1 U z \operatorname{sinc}(\Delta k z/2). \qquad (2.4.31)$$

Pour obtenir (2.4.31), il convient de simplifier, conformément à (2.4.30), l'équation (2.4.16) :

$$dv_2/dz = \pm\sigma_1 U\sqrt{1-(\Delta_1 v_2)^2}. \qquad (2.4.32)$$

Il n'est pas difficile de se convaincre que (2.4.31) est une solution de l'équation (2.4.32) satisfaisant à la condition $v_2(0) = 0$.

La relation (2.4.31) coïncide avec (2.4.26). Cette coïncidence n'est pas un effet du hasard, car pour $\Delta_1 \gg 1$ l'amplitude de l'onde

du deuxième harmonique est petite pour tous les z [v. (2.4.25) et (2.4.27)], ce qui est en accord avec l'approximation du champ constant de rayonnement fondamental.

Dans le cas où la condition de synchronisme est exactement satisfaite, on a sinc $(\Delta kz/2) = 1$. Dans ce cas, l'expression (2.4.31) devient

$$v_2(z) = \sigma_1 Uz. \qquad (2.4.33)$$

Remarquons que dans l'approximation du champ constant, l'amplitude de l'onde fondamentale est constante à des termes du deuxième degré de petitesse en $\sigma_1 Uz$ près. En effet, pour $\Delta k = 0$ on a

$$v_1(z)\sqrt{\sigma_2/\sigma_1} = \sqrt{1-v_2^2(z)} = 1 - v_2^2(z)/2 = 1 - (\sigma_1 Uz)^2/2. \qquad (2.4.34)$$

C'est en étudiant la génération de deuxième harmonique à l'intérieur de la cavité optique résonnante, surtout en régime continu, qu'il devient nécessaire de tenir compte de la diminution de l'amplitude de l'onde fondamentale par suite du transfert de son énergie au deuxième harmonique.

En admettant l'approximation du champ constant de rayonnement fondamental il convient de ne pas garder dans le système (2.2.22) que la deuxième équation. Dans ces conditions, l'amplitude A_1 doit être considérée comme une constante. Si l'on néglige l'absorption du rayonnement, on obtient à l'approximation considérée l'équation différentielle suivante pour l'amplitude complexe du deuxième harmonique:

$$dA_2/dz = -i\sigma_2 A_1^2 \exp(i\Delta kz). \qquad (2.4.35)$$

En effectuant l'intégration suivant la longueur z du cristal non linéaire et en tenant compte que $A_2(0) = 0$, on en trouve

$$A_2(z) = -i\sigma_2 A_1^2 \int_0^z \exp(i\Delta kz')\, dz',$$

ou bien

$$A_2(z) = \sigma_2 A_1^2 [1 - \exp(i\Delta kz)]/\Delta k,$$

ou encore

$$A_2(z) = -i\sigma_2 A_1^2 z \exp(i\Delta kz/2) \operatorname{sinc}(\Delta kz/2). \qquad (2.4.35a)$$

Si l'on passe des amplitudes complexes aux amplitudes réelles, on obtient

$$a_2(z) = |A_2(z)| = \sigma_2 a_1^2 \operatorname{sinc}(\Delta kz/2).$$

Il est aisé de voir que ce résultat coïncide avec (2.4.31) si on tient compte que $\sigma_2 a_1^2 = \sigma_1 U^2$ [v. (2.4.2) pour $a_2(0) = 0$].

Densité de puissance du deuxième harmonique. Coefficient de conversion du rayonnement fondamental en deuxième harmonique. — Le vecteur densité de puissance rayonnée est le *vecteur d'Oumov-Poynting*. Pour une onde monochromatique plane de pulsation ω et de vecteur d'onde $\mathbf{k}$, le vecteur densité de puissance du rayonne-

ment S se décrit par la relation cónnue

$$\mathbf{S} = (c^2/4\pi\omega)\,(\mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})).$$

Le double produit vectoriel $(\mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}))$ peut être mis sous la forme

$$(\mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})) = \mathbf{k}E^2 - \mathbf{E}\,(\mathbf{kE}). \qquad (2.4.36)$$

Nous supposerons que

$$\mathbf{kE} = 0. \qquad (2.4.37)\ ^{1)}$$

Il résulte de (2.4.36) et (2.4.37) que le vecteur S se confond en direction avec le vecteur d'onde **k**. Dans ce cas, la densité de puissance se décrit par l'expression

$$S = cnE^2/4\pi, \qquad (2.4.38)$$

où n est l'indice de réfraction à la pulsation ω.

En se servant de (1.4.1) et (2.2.24), on peut mettre (2.4.38) sous la forme suivante:

$$S = (cn/4\pi)\, a^2(z) \cos^2(\omega t - kz + \varphi). \qquad (2.4.39)$$

En supposant, comme d'habitude, que l'amplitude $a(z)$ varie lentement avec la distance z, et en prenant la moyenne du carré du cosinus, on obtient la densité de puissance rayonnée *mesurée expérimentalement*

$$S = cna^2(z)/8\pi. \qquad (2.4.40)$$

En partant de (2.4.40), représentons la densité de puissance du deuxième harmonique à la sortie du milieu non linéaire (pour $z = l$)

$$S_2(l) = (cn(2\omega)/8\pi)\, a_2^2(l) \qquad (2.4.41)$$

et la densité de puissance du rayonnement d'onde fondamentale à l'entrée du milieu

$$S_1(0) = (cn(\omega)/8\pi)\, a_1^2(0). \qquad (2.4.42)$$

Le rapport

$$\eta = S_2(l)/S_1(0) \qquad (2.4.43)$$

exprime le *coefficient de conversion* du rayonnement fondamental en deuxième harmonique (en densité de puissance). On l'appelle encore *efficacité* de la génération de deuxième harmonique.

Supposons que le deuxième harmonique n'existe pas à l'entrée du milieu non linéaire. Lorsque la condition de synchronisme est exactement satisfaite, on peut utiliser, à l'approximation du champ constant de rayonnement fondamental, le résultat (2.4.33) en le

---

[1]) Cette proposition sera discutée plus loin. Remarquons pour l'instant qu'elle correspond à la condition div $\mathbf{E} = 0$, qui a servi de base pour l'établissement des équations tronquées au § 2.2.

récrivant sous la forme

$$a_2(z) = \sigma_2 a_1^2(0)\, z. \qquad (2.4.44)^{1)}$$

Introduisant (2.4.44) dans (2.4.41), on trouve

$$S_2(l) = (cn\,(2\omega)/8\pi)\, \sigma_2^2 a_1^4(0)\, l^2. \qquad (2.4.45)$$

De (2.4.45) et (2.4.42) on déduit que

$$S_2(l) = (8\pi n\,(2\omega)/cn^2(\omega))\, [\sigma_2 S_1(0)\, l]^2. \qquad (2.4.46)$$

Cette relation est connue sous le nom de *formule de Kleinman* [10]. Elle est utilisée pour évaluer l'efficacité *maximale possible* de la génération de deuxième harmonique (dans le cadre de l'approximation des ondes planes).

Lorsqu'il y a un désaccord d'onde, on utilise, au lieu de (2.4.33), le résultat (2.4.31). Dans ce cas on obtient pour la densité de puissance de sortie et pour l'efficacité de la génération de deuxième harmonique les expressions suivantes

$$\boxed{S_2(l) = (8\pi n\,(2\omega)/cn^2(\omega))\, [\sigma_2 S_1(0)\, l \operatorname{sinc}(\Delta k l/2)]^2;} \qquad (2.4.47)$$

$$\boxed{\eta = (8\pi n\,(2\omega)/cn^2(\omega))\, S_1(0)\, [\sigma_2 l \operatorname{sinc}(\Delta k l/2)]^2.} \qquad (2.4.48)$$

Si l'approximation du champ constant de rayonnement fondamental n'est pas applicable (on dit dans ce cas que l'on a un *régime non linéaire* de génération de deuxième harmonique), il convient de faire usage de (2.4.20). Dans ces conditions, le résultat (2.4.41) devient [compte tenu de (2.4.42)]

$$\boxed{S_2(l) = (n\,(2\omega)\, \sigma_2/n\,(\omega)\, \sigma_1)\, S_1(0)\, \varkappa \operatorname{sn}^2(u;\ \varkappa)} \qquad (2.4.49)$$

et donc

$$\boxed{\eta = (n\,(2\omega)\, \sigma_2/n\,(\omega)\, \sigma_1)\, \varkappa \operatorname{sn}^2(u;\ \varkappa).} \qquad (2.4.50)$$

Rappelons qu'ici

$$u = l\sqrt{\sigma_2\sigma_2}\, a_1(0)/\sqrt{\varkappa};$$

$$\sqrt{\varkappa} = v_{2\,\max} = \sqrt{1 + (\Delta_1/2)^2} - \Delta_1/2;$$

$$\Delta_1 = \Delta k/(2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, a_1(0)). \qquad (2.4.50a)$$

---

[1]) Rappelons que $a_2(z) = Uv_2(z)$; pour $a_2(0) = 0$ on a $U = a_1(0)\sqrt{\sigma_2/\sigma_1}$ [v. (2.4.2)].

Courbe de synchronisme. — En pratique il est utile de connaître comment varie la densité de puissance du deuxième harmonique en cas de variation de l'angle formé entre la direction de propagation des ondes lumineuses et la direction de synchronisme, c'est-à-dire lors de la variation de Δk. La courbe traduisant la variation de S_2 en fonction de Δk est appelée *courbe de synchronisme.* La fig. 2.15 montre une courbe de synchronisme définie par la relation (2.4.47);

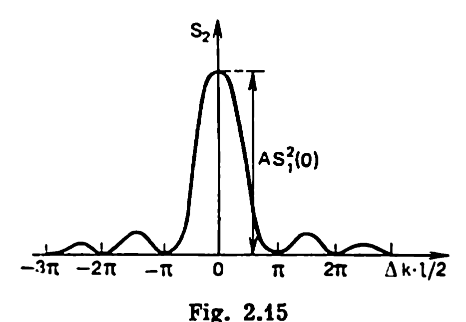


Fig. 2.15

$A = l^2\sigma_2^2 8\pi n\ (2\omega)/cn^2\ (\omega)$. Cette courbe correspond à l'approximation des ondes planes et à l'approximation du champ constant de rayonnement fondamental. La nature interférentielle de la courbe de synchronisme a été discutée au § 1.4.

Le degré de précision de « l'accrochage au synchronisme d'un cristal non linéaire », de même que la précision de maintien du synchronisme au cours de l'utilisation de l'installation, est déterminé par la *largeur* du maximum central de la courbe de synchronisme. Montrons comment on détermine ordinairement cette largeur. Faisons tourner un cristal non linéaire de longueur l à partir de la direction de synchronisme ($\theta = \theta_s$) dans le sens d'augmentation de l'angle θ par exemple (θ étant l'angle que la direction de propagation des ondes fait avec l'axe optique du cristal). Cette rotation se fait dans un plan passant par l'axe optique du cristal et la direction de synchronisme, que l'on appelle *plan de synchronisme* [1]). Dans ce cas le paramètre $\Delta kl/2$ augmentera depuis sa valeur nulle correspondant à $\theta = \theta_s$. Pour une certaine valeur de Δk (que nous désignerons par Δ_m) les battements spatiaux suivant l'axe des z (v. fig. 2.14) assureront un maximum d'amplitude du deuxième harmonique pour $z = l$. Il est évident que $\sin(\Delta_m l/2) = 1$ et donc

$$\Delta_m = \pi/l. \tag{2.4.51}$$

Pour $\Delta k = \Delta_m$ on a $\mathrm{sinc}^2(\Delta_m l/2) = 4/\pi^2 = 0{,}41$.

---

[1]) La variation de la longueur l lors de la rotation du cristal est négligée par suite de la petitesse évidente de l'écart angulaire.

Convenons de déterminer la largeur du maximum central de la courbe de synchronisme au niveau de 0,41 de sa valeur maximale. Ceci signifie que la largeur du maximum est égale à π en unités de $\Delta kl/2$.

Une telle définition de la largeur du maximum de courbe de synchronisme a un sens physique simple: à l'intérieur de la largeur Δ_m l'amplitude de champ du deuxième harmonique ne décroît pas sur toute la longueur du cristal.

Pour en finir avec la courbe de synchronisme, faisons quelques remarques sur le régime non linéaire pour lequel on tient compte de la réaction de l'onde du deuxième harmonique sur l'onde fondamentale. Vu que $v_{2\,max}$, u et $\varkappa$ figurant dans la relation $v_2(z) = v_{2\,max}\mathrm{sn}\,(u;\ \varkappa)$ sont fonctions du désaccord Δk, la courbe de synchronisme est dans ce cas une fonction plus complexe (par rapport à la courbe obtenue dans l'approximation du champ constant de rayonnement fondamental) de Δk:

$$v_2(z;\ \Delta k) = \left(\sqrt{1+(\Delta_1/2)^2} - \Delta_1/2\right) \mathrm{sn}\,[u(\Delta k);\ \varkappa(\Delta k)]. \qquad (2.4.52)$$

Par analogie avec le cas considéré précédemment, la largeur du maximum central de courbe de synchronisme peut être déterminée par la condition que dans l'intervalle de $\Delta k < \Delta_m$ la valeur de $v_2(z,\ \Delta k)$ ne décroisse pas pour tous les $z \leqslant l$. La fonction $v_2(z,\ \Delta k)$ passe par un maximum pour $\Delta k = \Delta_m$ et $z = l$. Puisqu'au maximum correspond $u = K$, on peut trouver la valeur de Δ_m à partir de la relation suivante (en supposant que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$)

$$\sigma a_1(0)\, v_{2\,max}(\Delta_m)\, l = \varkappa(\Delta_m)\, K(\varkappa). \qquad (2.4.53)$$

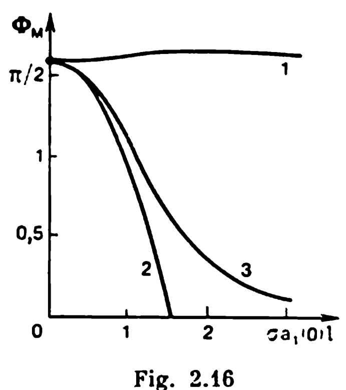


Fig. 2.16

A la différence du cas correspondant à l'approximation du champ constant de rayonnement fondamental, en régime non linéaire la valeur de Δ_m est une fonction complexe de tous les paramètres qui caractérisent le processus de génération de deuxième harmonique (σ, $a_1(0)$, l). Il est évident que les zéros de la fonction (2.4.52) suivant le paramètre $\Delta kl/2$ seront maintenant eux aussi fonctions des paramètres indiqués. Par exemple, lorsque $a_1(0)$ augmente, ces zéros ne sont pas équidistants, en se déplaçant vers l'origine des coordonnées; les amplitudes des maximums latéraux de courbe de synchronisme accusent dans ce cas une augmentation.

Remarquons que pour $\varkappa^2 \leqslant 0,3$ ou, ce qui revient au même, pour $\Delta_1 \geqslant 0,6$, la valeur de $K(\varkappa)$ et donc celle de la période de la fonction (2.4.52) sont pratiquement constantes. Dans ce cas, $K = \pi/2$ (avec une précision non inférieure à 90 %) et le sinus elliptique de Jacobi peut être remplacé par le sinus ordinaire:

$$v_2(z,\ \Delta k) = v_{2\,max}(\Delta k) \sin\,[u(\Delta k)]. \qquad (2.4.54)$$

Soulignons que la relation approchée (2.4.54) est obtenue dans une seule hypothèse ($\Delta_1 \geqslant 0,6$). Le caractère essentiellement non linéaire du processus de génération de deuxième harmonique s'en trouve conservé. Comme il résulte de (2.4.54), en régime non linéaire la valeur de Δ_m peut être déterminée de façon approchée à

partir de la relation

$$\Delta_m l/2 = (2/\pi)\,[(\pi/2)^2 - (\sigma a_1\,(0)\,l)^2]. \tag{2.4.55}$$

Pour de faibles valeurs de σa_1 (0) l, le résultat (2.4.55) se réduit à (2.4.51).

La fig. 2.16 montre les courbes de variation de $\Phi_m = \Delta_m l/2$ en fonction du paramètre σa_1 (0) l obtenues à l'approximation du champ constant du rayonnement fondamental (courbe *1*), à l'aide de la formule approchée (2.4.55) (courbe *2*) et à l'aide de la formule exacte (2.4.53) (courbe *3*). On voit que la fonction approchée (2.4.55) est bien applicable pour σa_1 (0) $l \leqslant 1$ (erreur non supérieure à 10 %), alors que l'approximation du champ constant ne conduit à un résultat satisfaisant qu'au voisinage immédiat du point σa_1 (0) $l = 0$.

§ 2.5. Génération de deuxième harmonique dans un faisceau lumineux divergent (approximation de l'optique géométrique)

Faisceau lumineux considéré comme un ensemble des rayons partiels; approximation de l'optique géométrique. — Envisageons un cristal non linéaire dans lequel entre un faisceau *divergent* de rayonnement de pulsation fondamentale ayant une *ouverture finie* (dimension linéaire transversale d_0) et caractérisé par un *angle de divergence* φ_0. Nous supposons que la direction de la bissectrice de l'angle de divergence (axe du faisceau) coïncide avec la direction de synchronisme. Posons $\varphi_0 \gg \varphi_d$, où $\varphi_d = 1{,}22\ \lambda/d_0$ est l'angle de divergence de diffraction (λ étant la longueur d'onde de l'onde fondamentale). La densité de puissance rayonnée à l'entrée du cristal est supposée constante suivant la section transversale du faisceau.

Dans la suite de l'exposé nous utiliserons l'*approximation de l'optique géométrique*. Dans cette approximation le faisceau lumineux est considéré comme un ensemble des rayons partiels. On suppose que les amplitudes de champ des différents rayons ne sont pas liées les unes aux autres. Cette indépendance mutuelle des amplitudes des rayons permet en particulier de parler d'une frontière bien nette du faisceau lumineux et d'un passage brusque de la lumière à l'ombre. La génération de deuxième harmonique dans le cadre de cette approximation se produit en quelque sorte le long des rayons partiels dont chacun peut être isolé par la pensée et considéré *indépendamment* des autres rayons. A chaque rayon partiel on peut associer une onde plane; ceci signifie que la génération de deuxième harmonique le long d'un rayon distinct peut être étudiée sur la base de la théorie élaborée pour les *ondes planes* (en se servant des résultats des §§ 2.2 à 2.4).

En admettant l'approximation de l'optique géométrique, représentons un faisceau divergent par l'ensemble des rayons partiels dont les prolongements concourent en un certain point situé sur l'axe du faisceau et constituant un centre imaginaire; v. point *M*

de la fig. 2.17 [1]). Ce point se trouve à la distance $R = d_0/\varphi_0$ du cristal. Puisque $l \ll R$ (l étant la longueur du cristal non linéaire), la variation des dimensions transversales du faisceau lumineux dans les limites du cristal peut être négligée. Des valeurs numériques typiques sont les suivantes : l = 1 à 5 cm, R = 1 à 5 m (pour $d_0 \doteq 2$ à 5 mm, φ_0 = 1 à 2 mrd).

La fig. 2.17 montre trois rayons partiels (rayons *1*, *2*, *3*) qui font des angles φ_1, φ_2, φ_3 avec la droite MO désignant la direction de

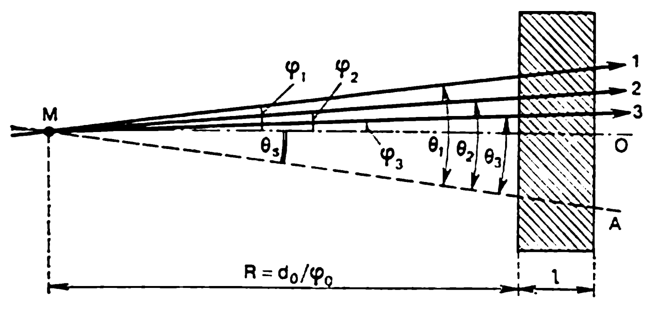


Fig. 2.17

synchronisme. La figure montre également la direction de l'axe optique du cristal (droite MA). Les angles formées entre ces rayons partiels et l'axe optique du cristal sont θ_1, θ_2, θ_3 respectivement. Remarquons que tous ces rayons se situent dans le *plan de synchronisme* (plan passant par l'axe optique du cristal et la direction de synchronisme). Pour de tels rayons $\varphi = \theta - \theta_s$. Les rayons sont caractérisés par un désaccord d'onde différent, en fonction de $|\theta - \theta_s|$. Nous supposerons que le désaccord reste inchangé lorsque la direction d'un rayon partiel varie dans un plan perpendiculaire au plan de synchronisme (dans les limites de l'ouverture numérique du faisceau).

Coefficients de dispersion angulaires. — Un rayon partiel situé dans le plan de synchronisme et faisant un angle θ avec l'axe optique du cristal se caractérise par un désaccord d'onde $\Delta k(\theta)$. Développons la fonction $\Delta k(\theta)$ en série entière au voisinage de $\theta = \theta_s$:

$$\Delta k(\theta) = \Delta k(\theta_s) + \left.\frac{d\,\Delta k}{d\theta}\right|_{\theta_s}(\theta-\theta_s) + \left.\frac{d^2\,\Delta k}{2\,d\theta^2}\right|_{\theta_s}(\theta-\theta_s)^2 + \ldots \quad (2.5.1)$$

Les coefficients

$$\gamma_1 = \left.\frac{d\,\Delta k}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_s} \quad (2.5.2)$$

[1]) La méthode que nous décrivons est en fait une généralisation des résultats obtenus dans [10] au cas d'un régime essentiellement non linéaire de génération de deuxième harmonique.

et

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 \Delta k}{d\theta^2}\Big|_{\theta=\theta_s} \qquad (2.5.3)$$

sont appelés *coefficients de dispersion angulaires* (de 1er et de 2e ordres respectivement). En tenant compte de (2.5.2) et (2.5.3) ainsi que de l'égalité évidente $\Delta k\,(\theta_s) = 0$, récrivons (2.5.1) sous la forme

$$\Delta k\,(\theta) = \gamma_1 (\theta - \theta_s) + \gamma_2 (\theta - \theta_s)^2 + \ldots \qquad (2.5.4)$$

Le désaccord d'onde maximal a lieu pour des rayons lumineux extrêmes (dans le plan de synchronisme). Pour ces rayons $|\theta - \theta_s| = \varphi_0/2$; par conséquent,

$$\Delta k_{max} = \gamma_1\varphi_0/2 + \gamma_2\varphi_0^2/4 + \ldots \qquad (2.5.5)$$

Cherchons l'expression du coefficient γ_1 pour le synchronisme *ooe* scalaire. Dans ce cas

$$\Delta k = K^e - 2k_o = (2\omega/c)\,(n^e\,(2\omega) - n_{o1}) \qquad (2.5.6)$$

(les désignations utilisées sont celles introduites au § 2.1). La variation de l'indice de réfraction de l'onde extraordinaire du deuxième harmonique en fonction de l'angle θ est, suivant (2.1.2), de la forme

$$n^e\,(\theta,\ 2\omega) = n_{o2}n_{e2}/\sqrt{n_{o2}^2 - (n_{o2}^2 - n_{e2}^2)\cos^2\theta}. \qquad (2.5.7)$$

Ainsi,

$$\gamma_1 = \frac{d\,\Delta k}{d\theta}\Big|_{\theta=\theta_s} = 2\,\frac{\omega n_{o2}n_{e2}}{c}\,\frac{(n_{o2}^2 - n_{e2}^2)\cos\theta_s \sin\theta_s}{[n_{o2}^2 - (n_{o2}^2 - n_{e2}^2)\cos^2\theta_s]^{3/2}}. \qquad (2.5.8)$$

En se servant de (2.1.9), on obtient

$$\boxed{\gamma_1 = 2\omega n_{o1}\sqrt{(n_{o1}^2 - n_{e2}^2)(n_{o2}^2 - n_{o1}^2)}/cn_{o2}n_{e2}.} \qquad (2.5.9)$$

Comme il découle de la relation (2.5.9), dans le cas du synchronisme à 90° ($\theta_s = 90°$, $n_{o1} = n_{e2}$) le coefficient de dispersion angulaire de 1er ordre est nul : $\gamma_1 = 0$.

Si on laisse de côté le synchronisme à 90°, on peut en règle générale ne prendre en considération que γ_1, car pour la majorité écrasante des milieux non linéaires et pour des faisceaux laser réalisés en pratique on a l'inégalité

$$\gamma_2\varphi_0 \ll \gamma_1. \qquad (2.5.10)$$

Autrement dit, dans beaucoup de cas on peut considérer que

$$\Delta k\,(\theta) \cong \gamma_1 (\theta - \theta_s) = \gamma_1\varphi \qquad (2.5.11)$$

et donc

$$\Delta k_{max} = \gamma_1\varphi_0/2. \qquad (2.5.12)$$

Pour que la conversion en deuxième harmonique soit efficace, il faut que le désaccord maximal dû à la divergence du faisceau lumineux ne soit pas supérieur à la largeur du maximum central de courbe de synchronisme ($\Delta k_{max} \leqslant \Delta_m$). En posant $\Delta k_{max} = \Delta_m$ et en utilisant (2.4.51) et (2.5.12), on obtient la relation

$$\varphi_0 = 2\pi/l\gamma_1 \qquad (2.5.13)$$

qui permet d'évaluer, à l'approximation du champ constant du rayonnement fondamental, la divergence maximale admissible φ_0.

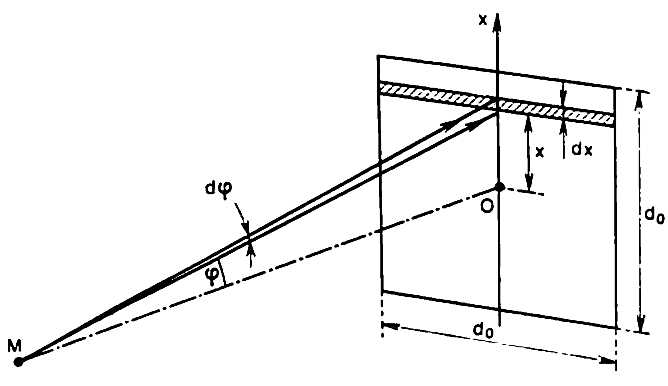


Fig. 2.18

Ces évaluations sont données pour différents cristaux dans le Tableau 2.2; on a supposé que $l = 1$ cm. Un cristal est d'autant moins critique à « l'accrochage au synchronisme » que $1/l\gamma_1$ est plus grand.

Tableau 2.2

Cristal	γ_1, $cm^{-1} \cdot$ mn d'angle^{-1}	φ_0, mn d'angle
KDP	0,97	6,5
ADP	1,10	5,7
$LiNbO_3$	0,51	12,3
RDA	0,82	7,7
CDA	0,20	31,4
RDP	0,11	57

Coefficient intégral de conversion en puissance du rayonnement fondamental en deuxième harmonique. — La fig. 2.18 montre la section transversale d'un faisceau ayant (pour plus de simplicité) la forme d'un carré; MO est la direction de synchronisme, l'axe des x étant choisi dans le plan de synchronisme. Considérons un rayon

partiel situé dans le plan de synchronisme et faisant avec la direction de synchronisme un angle φ. Partant de (2.4.49), écrivons pour ce rayon

$$S_2(l, \varphi) = (n(2\omega)\sigma_2/n(\omega)\sigma_1) S_1(0) \varkappa(\varphi) \operatorname{sn}^2[u(\varphi), \varkappa(\varphi)]. \tag{2.5.14}$$

Rappelons que l'amplitude de l'onde fondamentale est constante suivant la section transversale du faisceau, par conséquent, S_1 est indépendent de φ. Pour des évaluations pratiques il est admissible de poser que $n(2\omega)/n(\omega) = 1$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. En utilisant ces égalités, récrivons (2.5.14) sous la forme

$$S_2(l, \varphi) = S_1(0) \varkappa(\varphi) \operatorname{sn}^2[u(\varphi); \varkappa(\varphi)]. \tag{2.5.14a}$$

La puissance du deuxième harmonique prélevée à la surface élémentaire $ds = d_0\,dx$ a pour expression

$$dP_2(l, \varphi) = S_2(l, \varphi)\, d_0\, dx. \tag{2.5.15}$$

(Rappelons que les rayons qui traversent le carré représenté sur la fig. 2.18 suivant une ligne perpendiculaire à l'axe x, sont caractérisés par un même désaccord d'onde.) La *puissance totale* du deuxième harmonique obtenue à la sortie du cristal non linéaire se décrit par l'intégrale

$$P_2(l) = d_0 \int_{-d_0/2}^{d_0/2} S_2(l, \varphi)\, dx.$$

Vu que $x = \varphi\, d_0/\varphi_0$, récrivons cette intégrale sous la forme

$$P_2(l) = \frac{d_0^2}{\varphi_0} \int_{-\varphi_0/2}^{\varphi_0/2} S_2(l, \varphi)\, d\varphi. \tag{2.5.16}$$

Le rapport

$$\eta = P_2(l)/P_1(0) = P_2(l)/S_1(0)\, d_0^2 \tag{2.5.17}$$

est appelé *coefficient intégral de conversion en puissance* du rayonnement fondamental en deuxième harmonique. Compte tenu de (2.5.16), représentons ce coefficient sous la forme

$$\eta_p = \frac{1}{S_1(0)\varphi_0} \int_{-\varphi_0/2}^{\varphi_0/2} S_2(l, \varphi)\, d\varphi. \tag{2.5.18}$$

En y portant (2.5.14a), on obtient pour η_p l'expression suivante:

$$\eta_p = \frac{1}{\varphi_0} \int_{-\varphi_0/2}^{\varphi_0/2} \varkappa(\varphi) \operatorname{sn}^2[u(\varphi); \varkappa(\varphi)]\, d\varphi. \tag{2.5.19}$$

Coefficient intégral de conversion en deuxième harmonique à l'approximation du champ constant de rayonnement fondamental. — A cette approximation, au lieu de (2.4.49), on peut utiliser une relation plus simple (2.4.47). En tenant compte des remarques faites plus haut sur la possibilité de poser $n(2\omega)/n(\omega) = 1$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, récrivons cette relation sous la forme

$$S_2(l, \varphi) = (8\pi\sigma^2/cn)\, S_1^2(0)\, l^2 \operatorname{sinc}^2(\Delta k(\varphi)\, l/2). \qquad (2.5.20)$$

Introduisons (2.5.20) dans (2.5.18) et utilisons le résultat (2.5.11) pour caractériser la dépendance du désaccord d'onde vis-à-vis de l'angle (ce qui signifie que le synchronisme à 90° n'est pas considéré). Il vient

$$\eta_p = \frac{\rho}{\varphi_0} \int_{-\varphi_0/2}^{\varphi_0/2} \frac{\sin^2(\varphi\gamma_1 l/2)}{(\varphi\gamma_1 l/2)^2}\, d\varphi, \qquad (2.5.21)$$

avec

$$\rho = 8\pi\sigma^2 S_1(0)\, l^2/cn. \qquad (2.5.22)$$

En introduisant la variable d'intégration $\xi = \varphi\gamma_1 l/2$, mettons (2.5.21) sous la forme

$$\eta_p = \frac{\rho}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\sin^2\xi}{\xi^2}\, d\xi, \qquad (2.5.23)$$

où $\Omega = \varphi_0\gamma_1 l/4 = \Delta k_{max} l/2$. Intégrons (2.5.23) par parties :

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} \sin^2\xi \frac{d\xi}{\xi^2} = -\sin^2\xi \frac{1}{\xi}\Big|_{-\Omega}^{\Omega} + \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\sin 2\xi}{\xi}\, d\xi = -\frac{2\sin\Omega}{\Omega} + 2\int_0^{2\Omega} \frac{\sin\mu}{\mu}\, d\mu$$

(ici $\mu = 2\xi$).

La fonction

$$\int_0^X \frac{\sin\mu}{\mu}\, d\mu = \operatorname{Si} X \qquad (2.5.24)$$

est un *sinus intégral* [9]. Ainsi, à l'approximation du champ constant du rayonnement fondamental le coefficient intégral de conversion η_p a pour expression

$$\boxed{\eta_p = \rho\left(\frac{\operatorname{Si} 2\Omega}{\Omega} - \frac{\sin^2\Omega}{\Omega^2}\right).} \qquad (2.5.25)$$

Le sinus intégral peut être représenté par une série entière

$$\mathrm{Si}\, X = X - \frac{X^3}{3 \cdot 3\,!} + \frac{X^5}{5 \cdot 5\,!} - \frac{X^7}{7 \cdot 7\,!} + \ldots \tag{2.5.26}$$

De (2.5.26) il résulte que pour de faibles valeurs de X ($X < 1$) on peut considérer que Si $X \approx X$. C'est ainsi que pour $X = 0{,}5$ le deuxième terme de la série

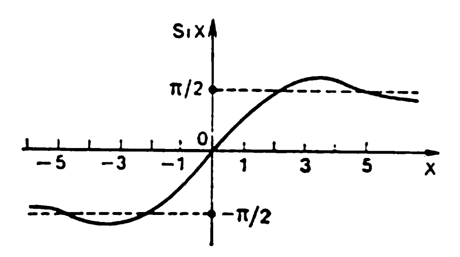


Fig. 2.19

(2.5.26) n'est égal qu'à 1,4 % du premier, et pour $X = 0{,}2$, à 0,2 %. Pour de fortes valeurs de X ($X \gg 1$), on peut poser le sinus intégral égal à $\pi/2$:

$$\lim_{X \to \infty} \mathrm{Si}\, X = \pi/2. \tag{2.5.27}$$

La courbe du sinus intégral est représentée à la fig. 2.19.

Signalons *deux cas limites*. Dans le *premier*, on suppose que $\varphi_0 l \gamma_1 \ll 1$. Ceci peut être lié à une faible divergence du faisceau lumineux, à une petite longueur du cristal non linéaire, à une faible dispersion angulaire. Dans ce cas sin $\Omega/\Omega \approx 1$ et Si $2\Omega \approx 2\Omega$. Il en résulte que l'expression (2.5.25) prend la forme suivante [cf. l'expression (2.4.48)]

$$\eta_p = \rho = (8\pi\sigma^2/cn)\, S_1(0)\, l^2. \tag{2.5.28}$$

On notera que le coefficient η_p est proportionnel à la densité de puissance du rayonnement fondamental et au carré de la longueur du cristal non linéaire.

Dans le *second* cas limite, on suppose que $\Omega \gg 1$ ($\varphi_0 l \gamma_1 \gg 1$). En posant dans (2.5.25) sin $\Omega/\Omega = 0$ et Si $2\Omega = \pi/2$, on obtient

$$\eta_p = \pi\rho/2\Omega = (16\pi^2\sigma^2/cn\varphi_0\gamma_1)\, S_1(0)\, l. \tag{2.5.29}$$

A la différence du premier cas, le coefficient η_p n'est maintenant proportionnel qu'à la longueur du cristal.

La fig. 2.20 montre les courbes représentatives de la fonction $\eta_p(l)$ calculées à l'approximation du champ constant du rayonnement fondamental [à l'aide de la formule (2.5.25)]. Les lignes en traits interrompus repondent aux relations (2.5.28) et (2.5.29); la première est valable pour de petits l, et la seconde, pour des valeurs relativement grandes de l.

Les évaluations montrent que l'approximation du champ constant donne de bons résultats dans le cas des champs des lasers continus de faible puissance ($\eta_p = 1$ à 5 %).

Régime non linéaire de conversion du rayonnement fondamental en deuxième harmonique. — L'utilisation de la relation (2.5.19) exige en toute rigueur d'effectuer une intégration numérique sur ordinateur. En même temps, on a fait des tentatives d'obtenir analytiquement des expressions *approchées* pour η_p en *régime non linéaire* (v. par exemple [17]); mais les relations obtenues étaient trop encombrantes.

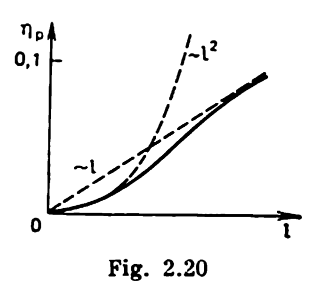


Fig. 2.20

Une solution analytique approchée de l'intégrale (2.5.19) peut être obtenue à la condition que $\varkappa^2 \leqslant 0,3$ ($\Delta_1 \geqslant 0,6$). Comme on l'a vu au § 2.4, le sinus elliptique de Jacobi peut être remplacé dans ce cas par le sinus ordinaire (avec une erreur ne dépassant pas 10 %); la relation (2.5.19) prend alors la forme

$$\eta_p \cong \frac{1}{\varphi_0} \int_{-\varphi_0/2}^{\varphi_0/2} \varkappa(\varphi) \sin^2(u(\varphi))\, d\varphi. \qquad (2.5.30)$$

L'intégration de (2.5.30) effectuée compte tenu de (2.5.11) donne pour η_p l'expression approchée suivante:

$$\eta_p \cong \frac{Q_2}{3\Omega}\Big[Q - \frac{Q^2}{v} + \frac{\sin^2 Q}{Q} + \frac{1}{2}\sin 2Q - \\ - \frac{Q^2}{v^3}\left(\sin^2 v + \frac{v}{2}\sin 2v\right) + \\ + (3-2Q^2)\left(\operatorname{Si} 2v - \frac{\sin^2 v}{v} - \operatorname{Si} 2Q + \frac{\sin^2 Q}{Q}\right)\Big]. \qquad (2.5.31)$$

Rappelons qu'ici $\Omega = \Delta k_{max} l/2 = \varphi_0 l \gamma_1/4$ et qu'en outre on utilise les désignations

$$Q = \sigma a_1(0)\, l\,; \quad v = Q\left(\sqrt{1+(\Delta_2/2)^2} + \Delta_2/2\right); \\ \Delta_2 = \Delta k_{max}/2\sigma a_1(0) = \varphi_0 \gamma_1/4\sigma a_1(0). \qquad (2.5.32)$$

Remarquons que l'intégration de (2.5.19) sur l'angle φ ou, ce qui revient au même, sur le paramètre $\Delta k \sim \varphi$ dans les limites de zéro à Δk_{max} comprend aussi l'intervalle [0; 0,6] de valeurs de Δ_1 dans lequel à proprement parler le sinus elliptique de Jacobi ne peut en général pas être remplacé par le sinus ordinaire. Pourtant, comme le montrent des calculs effectués pour $Q < 2$, la contribution de cet intervalle est sans importance. On le voit dans le Tableau 2.3 où sont comparées, pour différents Ω et Q, les valeurs de η_p calculées sur ordinateur à l'aide de la formule (2.5.19) (colonne I) et de la formule approchée (2.5.31) (colonne II). On peut constater que pour l'ensemble des valeurs la formule (2.5.31) assure une approximation satisfaisante (avec une erreur non supérieure à 10 %) de la fonction exacte η_p (Q, Ω), sauf le cas où de faibles valeurs de Ω se combi-

nent avec de fortes valeurs de Q. Ici, l'erreur peut atteindre 30 %, de sorte que la formule (2.5.31) ne peut servir qu'à des calculs estimatifs.

Tableau 2.3

Ω	$Q = 0,5$		$Q = 1,0$		$Q = 1,5$		$Q = 2,0$	
	I	II	I	II	I	II	I	II
1	0,170	0,196	0,470	0,555				0,328
2	0,130	0,145	0,350	0,386	0,350	0,435	0,310	0,268
3	0,105	0,101	0,240	0,267	0,324	0,297	0,320	0,227
4	0,080	0,076	0,190	0,203	0,235	0,242	0,258	0,197
6	0,065	0,053	0,140	0,145	0,195	0,185	0,222	0,150
8	0,045	0,041	0,105	0,111	0,142	0,139	0,163	0,125
10	0,035	0,033	0,085	0,090	0,120	0,115	0,139	0,100
12	0,025	0,028	0,075	0,076	0,095	0,097	0,111	0,084

L'analyse des données réunies dans le Tableau 2.3 montre que le coefficient de conversion η_p varie en fonction du paramètre Q^2 de façon non monotone (rappelons que $Q^2 = (\sigma a_1(0)\, l)^2 \sim S_1(0)\, l^2$). Ceci signifie que pour une valeur fixée du paramètre Ω, proportionnelle à la divergence du faisceau lumineux, il existe une valeur optimale du paramètre Q^2 pour laquelle la valeur de η_p est maximale. Le processus de génération de deuxième harmonique peut donc être optimisé en vue d'obtenir soit le maximum d'efficacité η_p, soit le maximum de puissance de sortie du deuxième harmonique $P_2(l)$.

Considérons la variation de η_p et de $P_2(l)$ en fonction du paramètre Q. Au lieu de $P_2(l)$ utilisons maintenant $\eta_p Q^2$. En effet, d'après (2.5.17) et (2.4.42), on a

$$P_2(l) = P_1(0)\,\eta_p = (cn/8\pi)\, a_1^2(0)\, d_0^2 \eta_p,$$

d'où on tire [1])

$$P_2(l) = (cnd_0^2/8\pi\sigma^2 l^2)\,\eta_p Q^2. \tag{2.5.33}$$

Les courbes de variation de η_p et de $\eta_p Q^2$ en fonction de Q calculées sur ordinateur pour différentes valeurs de Ω à l'aide de la formule (2.5.19) sont représentées par les fig. 2.21 et 2.22. Les chiffres de *1* à *9* sur ces figures se rapportent aux valeurs du paramètre Ω égales respectivement à 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 22,5.

En examinant la fig. 2.21, on voit que lorsque Q augmente, la fonction $\eta_p(Q)$ manifeste une tendance à se saturer, de plus le coefficient η_p passe par un maximum à de faibles valeurs de Ω. Lorsque Ω augmente, l'efficacité de la conversion décroît rapidement. Pour expliquer le caractère des courbes représentatives de $\eta_p(Q)$, rappe-

---

[1]) Si la section du faisceau est ronde (de diamètre d_0) et non carrée, d_0^2 doit être remplacé dans (2.5.33) par $\pi d_0^2/4$.

lons que plus grand est l'angle φ d'un rayon partiel, plus grand est le désaccord d'onde et donc moins efficacement doit se dérouler le processus de génération de deuxième harmonique. Pourtant, si les valeurs de Q sont grandes et celles de Ω petites, le coefficient de conversion η_p peut devenir plus grand pour des rayons plus divergents parce que le processus intense de génération de deuxième harmoni-

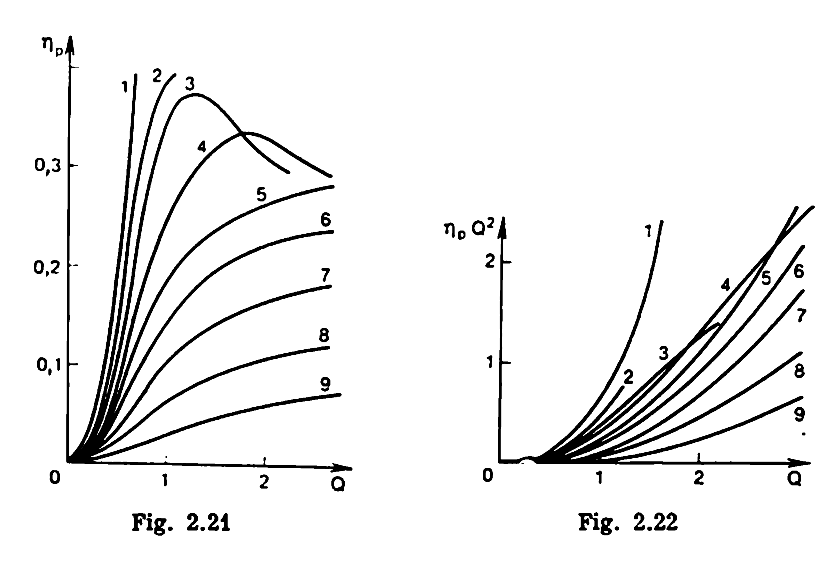


Fig. 2.21

Fig. 2.22

que par des rayons centraux s'accompagne d'un épuisement considérable de l'onde fondamentale, ce qui peut provoquer même un transfert inverse de puissance.

Les courbes de variation de $\eta_p Q^2$ (autrement dit, de la puissance $P_2(l)$) en fonction de Q pour σl-constante, montrées sur la fig. 2.22, illustrent une croissance monotone de la puissance du deuxième harmonique avec Q; la vitesse de cette croissance diminue lorsque Ω augmente.

Les courbes des fig. 2.21 et 2.22 illustrent bien la forte influence que la divergence du faisceau lumineux a sur l'efficacité de la génération de deuxième harmonique et sur la puissance de sortie de cet harmonique. Ainsi, pour $Q = 2$, lorsqu'on passe d'un faisceau à divergence de diffraction ($\Omega \approx 0$) à un faisceau réel ayant une divergence de près de 1 mn d'angle (pour un cristal de KDP de $l = 4$ cm ceci correspond au paramètre $\Omega \approx 2$ dans le cas de l'interaction *ooe*), la puissance du deuxième harmonique devient trois fois plus petite, alors que pour une divergence de 6 mn d'angle, elle est affaiblie huit fois.

Les graphiques que nous venons de considérer permettent de construire des courbes traduisant la variation de η_p en fonction de l

pour différentes valeurs des paramètres $\sigma a_1(0)$ et Δk_{max}. De telles courbes sont montrées sur la fig. 2.23 (*1* pour $\sigma a_1(0) = 0{,}6$ cm^{-1}, $\Delta k_{max} = 2$ cm^{-1}; *2* pour $\sigma a_1(0) = 0{,}4$ cm^{-1}, $\Delta k_{max} = 2$ cm^{-1}; *3* pour $\sigma a_1(0) = 0{,}6$ cm^{-1}, $\Delta k_{max} = 4$ cm^{-1}; *4* pour $\sigma a_1(0) = 0{,}4$ cm^{-1}, $\Delta k_{max} = 4$ cm^{-1}). Chacune des courbes de $\eta_p(l)$ passe par un maximum auquel correspond la longueur *optimale* l_{opt} du cristal non linéaire. La valeur l_{opt} se détermine principalement par le paramètre $\sigma a_1(0)$, alors que la variation de l_{opt} en fonction de Δk_{max} est relativement faible. L'utilisation des cristaux de longueur supérieure à l_{opt} n'est pas raisonnable du fait que le transfert inverse de puissance provoquera une diminution de η_p.

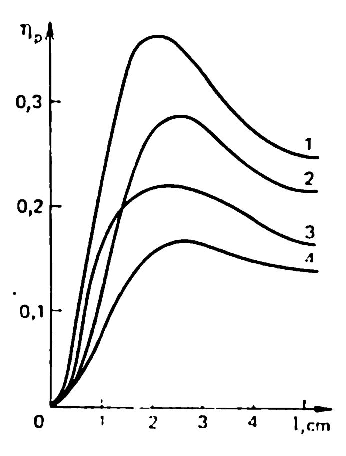


Fig. 2.23

Remarquons que pour comparer les données expérimentales avec les résultats théoriques considérés plus haut il convient de procéder avec une grande prudence. Nous avons considéré ici le régime stationnaire de génération de deuxième harmonique. En un tel régime les valeurs de $Q \approx 1$ sont *a priori* irréalisables. Aux régimes quasi continus et impulsionnels il n'est pas difficile d'obtenir des valeurs de Q atteignant celles de claquage, mais dans de tels cas la théorie doit être corrigée relativement à l'impulsion d'onde fondamentale. On doit également prendre en considération une répartition non uniforme de la densité de puissance de l'onde fondamentale suivant la section transversale du faisceau lumineux et introduire des corrections appropriées. En d'autres termes, la théorie de la génération de deuxième harmonique doit tenir compte de la *modulation spatio-temporelle* du rayonnement d'onde fondamentale.

§ 2.6. Génération de deuxième harmonique par des impulsions lumineuses (approximation quasi statique)

Impulsions lumineuses à front plan. — Tout en restant dans le cadre de l'approximation des *ondes planes*, supposons que l'amplitude des ondes soit *modulée dans le temps*. En d'autres termes, nous nous proposons de considérer la génération de deuxième harmonique par des *impulsions lumineuses* à front de phase plan. Dans ce cas, au lieu de (2.2.2) on utilise pour l'intensité de champ lumineux (on considère un synchronisme *ooe* scalaire) l'expression suivante:

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2}\{\mathbf{e}_1 A_1(z, t) \exp[i(\omega t - kz)] + \mathbf{e}_2 A_2(z, t) \exp[i(2\omega t - Kz) + \text{c.c.}\}. \quad (2.6.1)$$

Il semble à première vue que la différence entre (2.6.1) et (2.2.2) ne soit pas substantielle. Or, en réalité il existe ici une différence de

principe. La modulation de l'amplitude de champ dans le temps signifie que maintenant le rayonnement n'est plus monochromatique. Le *spectre de fréquences* du rayonnement d'onde fondamentale se décrit par la fonction

$$F_\omega(\omega') \sim \int_{-\infty}^{\infty} A_1(z,\ t) \exp[i(\omega-\omega')t - ikz]\, dt, \qquad (2.6.2)$$

qui se caractérise par une pulsation centrale (fondamentale) et a une *largeur* $\Delta\omega'$ liée à la durée τ_1 de l'impulsion lumineuse [autrement dit, à la largeur de la fonction $A_1(t)$] par la relation connue

$$\Delta\omega' \approx 1/\tau_1. \qquad (2.6.3)$$

Supposons que

$$\Delta\omega' \ll \omega. \qquad (2.6.4)$$

Ceci signifie que l'impulsion lumineuse peut être considérée comme un signal quasi monochromatique à spectre de fréquences étroit. De telles impulsions (signaux) sont appelées *paquets* (*groupes* ou encore *trains*) *d'ondes*.

Ainsi, à l'impulsion lumineuse $A_1(z,\ t) \exp[i\omega t - ik(\omega)z]$ il convient de faire correspondre un *ensemble des ondes monochromatiques* de pulsations ω' et de vecteurs d'onde $k(\omega')$. Les pulsations ω' occupent un certain intervalle $\Delta\omega'$ « attaché » à la pulsation fondamentale ω. Fait important, toutes ces ondes monochromatiques se propagent dans un milieu *dispersif*, de sorte que leurs vitesses de phase $c/n(\omega')$ sont différentes. Cette circonstance a pour effet qu'au fur et à mesure qu'elle se propage dans le milieu, l'impulsion lumineuse se déforme (effet de *flou de dispersion* du paquet d'ondes).

Développons la fonction $k(\omega')$ en série de puissance au voisinage de $\omega' = \omega$ et ne gardons que trois termes du développement (étant donné la petitesse de $\Delta\omega'$), il vient

$$k(\omega') = k(\omega) + (\omega'-\omega)\left(\frac{dk}{d\omega'}\right)_\omega + \frac{1}{2}(\omega-\omega')^2\left(\frac{d^2k}{d\omega'^2}\right)_\omega. \qquad (2.6.5)$$

L'effet de flou de dispersion du paquet d'ondes est lié au troisième terme du second membre de (2.6.5). Un flou efficace se produit sur la longueur

$$L_{\text{dis}} = \tau_1^2/2\left(\frac{d^2k}{d\omega'^2}\right)_\omega, \qquad (2.6.6)$$

que l'on appelle *longueur du flou de dispersion*. Il y a lieu d'attirer l'attention sur le fait que $L_{\text{dis}} \sim \tau_1^2$. Plus courte est l'impulsion, plus large est son spectre de fréquences et donc plus intense est l'effet de flou de dispersion (plus petite est la longueur L_{dis}). Si le troisième terme de (2.6.5) est négligeable, le paquet d'ondes (impulsion lumineuse) se propage dans le milieu, sans subir de distorsion, à la

vitesse

$$u = 1 \Big/ \left(\frac{dk}{d\omega'} \right)_{\omega}, \qquad (2.6.7)$$

que l'on appelle *vitesse de groupe* [1]). Rappelons que $k(\omega') = \omega' n(\omega')/c$. Par conséquent,

$$c/u = n(\omega) + \omega\, (dn/d\omega')\, \omega. \qquad (2.6.8)\ ^{2})$$

Comme le montre la relation (2.6.8), les vitesses de groupe des impulsions de pulsation fondamentale et de celles du deuxième harmonique sont à proprement parler *différentes*. Désignons-les par u_1 et u_2 respectivement.

En faisant usage de (2.2.2), nous avons obtenu au § 2.2 le système d'équations tronquées (2.2.22). Si au lieu de (2.2.2) on utilise (2.6.1), on peut obtenir un système d'équations tronquées constitué des équations (2.2.22) complétées par des termes contenant des dérivées partielles par rapport au temps $\partial A_{1,2}/\partial t$ et $\partial^2 A_{1,2}/\partial t^2$. Chacun de ces termes est lié à un effet physique bien déterminé. Les termes en dérivées premières ($\partial A_1/\partial t$ et $\partial A_2/\partial t$) permettent de tenir compte de l'effet de *retard de groupe* des impulsions lumineuses interagissantes. Cet effet se manifeste par le fait que par suite de la différence de vitesse de groupe les impulsions d'onde fondamentale et celles du deuxième harmonique se propageant dans le cristal non linéaire se trouvent *déphasées* (l'une des impulsions *est en retard* sur l'autre). Les termes en dérivées secondes (en $\partial^2 A_1/\partial t^2$ et $\partial^2 A_2/\partial t^2$) permettent de tenir compte de l'effet de *flou de dispersion* des impulsions lumineuses.

Approximation quasi statique. — Admettons que

$$l \,|\, 1/u_1 - 1/u_2 \,| \ll \tau_1, \qquad (2.6.9)$$

$$l \ll L_{\text{dis}}. \qquad (2.6.10)$$

L'inégalité (2.6.9) signifie que la différence entre les temps de passage des impulsions de l'onde fondamentale et du deuxième harmonique à travers un cristal non linéaire de longueur l est beaucoup plus petite que la durée de l'impulsion lumineuse elle-même; de ce fait, le décalage des impulsions l'une par rapport à l'autre peut être négligé. La différence $(1/u_1 - 1/u_2)$ porte le nom d'*écart de vitesses de groupe*. Dans le cas considéré, cet écart est sans importance. L'inégalité (2.6.10) signifie que pendant son trajet dans le cristal non linéaire l'impulsion n'a pas le temps de se déformer notablement; autrement dit, on peut ne pas tenir compte de l'effet de flou de dispersion.

---

[1]) Pour plus de détail, voir par exemple [11].

[2]) En l'absence de dispersion ($dn/d\omega' = 0$), on a $c/u = n(\omega)$. Dans ce cas, la vitesse de groupe est égale à la vitesse de phase $c/n(\omega)$ et le flou de dispersion ne se manifeste pas.

Négliger l'écart de vitesses de groupe et le flou de dispersion revient à dire que dans les équations tronquées on peut *omettre* les termes contenant les dérivées $\partial A_{1,2}/\partial t$ et $\partial^2 A_{1,2}/\partial t^2$. En faisant usage de (2.2.22) et en négligeant l'absorption linéaire ($\delta_1 = \delta_2 = 0$), écrivons ces équations sous la forme suivante

$$\left.\begin{aligned} \partial A_1(z, t)/\partial z + i\sigma_1 A_1^* A_2 \exp(-i\Delta kz) = 0; \\ \partial A_2(z, t)/\partial z + i\sigma_2 A_1^2 \exp(i\Delta kz) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2.6.11)$$

Les conditions aux limites (conditions à $z = 0$) seront représentées sous la forme

$$A_1(0, t) = A_{10} f(t); \quad A_2(0, t) = 0, \quad (2.6.12)$$

où $f(t)$ est le facteur de forme temporel de l'impulsion d'entrée de l'onde fondamentale. (Nous supposons comme d'habitude que le deuxième harmonique n'existe pas à l'entrée du cristal non linéaire.)

L'absence de dérivées par rapport au temps dans les équations (2.6.11) permet de fixer un instant quelconque et de résoudre *pour l'instant choisi* le problème aux limites stationnaire de la génération de deuxième harmonique. Ce problème a été examiné aux §§ 2.3 et 2.4 pour les ondes planes et au § 2.5 pour le faisceau lumineux divergent. En toute rigueur, l'amplitude A_1 à l'entrée du cristal non linéaire à des instants différents aura des valeurs différentes. A l'instant t l'amplitude A_1 a la valeur $A_1(0, t)$ à laquelle correspond la valeur instantanée de la puissance d'entrée $P_1(0, t)$ de l'onde fondamentale. En résolvant le problème aux limites stationnaire, on trouve pour l'instant choisi t la valeur *instantanée* de la puissance de sortie du deuxième harmonique $P_2(l, t)$ et le coefficient *instantané* de conversion en puissance

$$\eta_p(t) = P_2(l, t)/P_1(0, t). \quad (2.6.13)$$

L'intégration par rapport au temps permet de trouver l'*énergie de l'impulsion d'entrée* de l'onde fondamentale

$$E_1(0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(0, t)\, dt \quad (2.6.14)$$

et l'*énergie de l'impulsion de sortie* du deuxième harmonique

$$E_2(l) = \int_{-\infty}^{\infty} P_2(l, t)\, dt. \quad (2.6.15)$$

Le rapport

$$\eta_E = E_2(l)/E_1(0) \quad (2.6.16)$$

donne le *coefficient de conversion en énergie*. Il s'ensuit des relations (2.6.13) à (2.6.16) que $\eta_E \neq \int \eta_p(t)\, dt$.

L'approximation que nous considérons est dite *quasi statique*. On parle aussi d'un régime quasi stationnaire impulsionnel de génération de deuxième harmonique. Les inégalités (2.6.9) et (2.6.10) déterminent la condition d'applicabilité de l'approximation quasi statique.

Cette approximation est largement utilisée en pratique. Elle est applicable même pour des lasers déclenchés. Dans ce cas, la durée de l'impulsion de l'onde fondamentale est de 0,1 à 1 µs pour les lasers à pompage continu et de 5 à 50 ns pour les lasers pompés par impulsion. La longueur du cristal non linéaire est d'environ 1 à 5 cm. En tenant compte des valeurs indiquées pour l et τ_1, considérons le cas le plus « dangereux » (au point de vue de l'applicabilité de l'approximation quasi statique) : $l = 5$ cm, $\tau_1 = 5$ ns. En posant $u_{1,2} \approx 10^{10}$ cm/s, on obtient $l/u_{1,2} \approx 0{,}5$ ns. Ainsi, $l/u_{1,2} \ll \tau_1$ et donc la condition (2.6.9) est a priori satisfaite [1]). Pour la plupart des cristaux, dans le domaine de transparence $d^2k/d\omega^2 \approx 10^{-27}$ s²/cm. Dès lors, suivant (2.6.6), $L_{dis} \approx 10^{10}$ cm. Ceci signifie que dans ce cas la condition (2.6.10) est satisfaite avec une très grande marge.

L'approximation quasi statique cesse d'être applicable lorsqu'on utilise des impulsions laser ultracourtes ($\tau_1 \lesssim 10^{-11}$ s). Dans ce cas, on parle de la génération de deuxième harmonique en régime *non stationnaire* (v. § 3.4).

Méthode graphique de détermination du coefficient instantané de conversion en puissance. — Dans le cadre de l'approximation quasi statique il existe une méthode *graphique* commode permettant de déterminer la variation de η_p en fonction du temps pour une variation donnée de la puissance d'entrée du rayonnement d'onde fondamentale avec le temps [de la variation $P_1(0, t)$]. Dans ce cas on suppose également connue la variation du coefficient *stationnaire* η_p en fonction de la puissance $P_1(0)$ (on a en vue la variation déterminée au régime de génération stationnaire de deuxième harmonique).

Reportons-nous à la fig. 2.24. Les courbes *1* et *2* traduisent la variation de η_p en fonction de $P_1(0)$ lors de la génération stationnaire de deuxième harmonique pour les ondes planes et le faisceau divergent respectivement ; la courbe *3* représente le profil temporel de l'impulsion d'entrée du rayonnement fondamental [variation de la puissance $P_1(0)$ au cours du temps]. Les expressions analytiques de ces fonctions sont ici sans importance parce que la fonction cherchée $\eta_p(t)$ sera construite graphiquement. Choisissons un certain instant, par exemple, t_1 (v. figure). A cet instant la fonction $P_1(0)$ prend la valeur P_1'. Le coefficient stationnaire η_p prend, pour $P_1(0) = P_1'$, la valeur η_p' dans le cas des ondes planes et η_p'' dans le cas du faisceau

[1]) La condition $l/u \ll \tau_1$ est suffisante mais non nécessaire pour la vérification de l'inégalité (2.6.9). Cette dernière peut être également réalisée dans le cas où $\tau_1 < l/u$.

divergent. A l'approximation quasi statique ces valeurs sont des valeurs cherchées du coefficient *instantané* de conversion à l'instant t_1 ; c'est ainsi que sont déterminés les points A_1 et A_2 sur les courbes de $\eta_p(t)$. En choisissant des instants différents, on peut construire

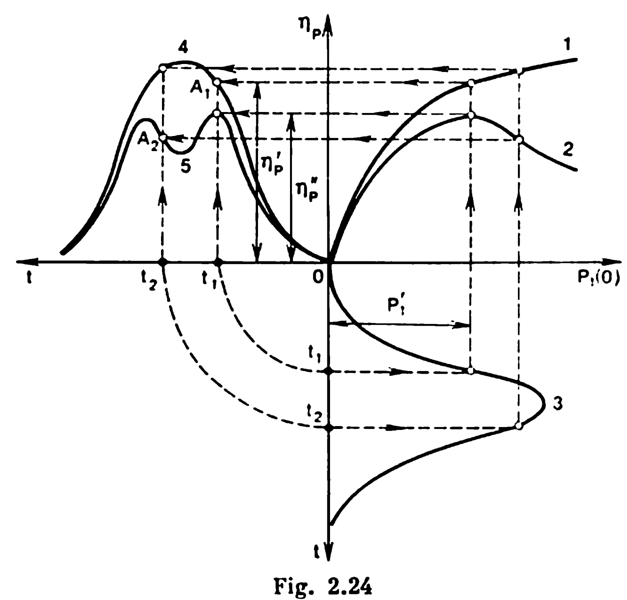


Fig. 2.24

la courbe représentative de la fonction cherchée $\eta_p(t)$; v. sur la figure la courbe *4* pour les ondes planes et la courbe *5* pour le faisceau divergent.

En multipliant par $P_1(0, t)$ la fonction $\eta_p(t)$ ainsi obtenue, on trouve la fonction $P_2(l, t)$ qui décrit la variation avec le temps de la puissance de sortie du deuxième harmonique. L'intégration de $P_1(0, t)$ et $P_2(l, t)$ par rapport au temps donne l'énergie de l'impulsion d'entrée de rayonnement fondamental et celle de l'impulsion de sortie du deuxième harmonique respectivement.

Proposons-nous maintenant de considérer certaines solutions *analytiques* pour la génération quasi stationnaire impulsionnelle de deuxième harmonique.

Approximation du champ constant du rayonnement fondamental. — Considérons le cas des *ondes planes* en supposant que la condition de synchronisme est exactement satisfaite ($\Delta k = 0$). Dans ce cas, l'expression de $P_2(l, t)$ aura à l'approximation quasi statique la même forme que celle de (2.4.46):

$$\boxed{P_2(l, t) = 2\lambda\,[\sigma_2 P_1(0, t)\, l]^2.} \qquad (2.6.17)$$

Ici, $\lambda = 4\pi n\,(2\omega)/cn^2\,(\omega)\,s$, s étant la surface de la section transversale du faisceau lumineux [1]). Pour l'impulsion de l'onde fondamentale ayant une forme *gaussienne*

$$P_1(0,\ t) = P_1(0,\ 0)\exp(-4t^2/\tau_1^2), \tag{2.6.18}$$

on obtient à partir de (2.6.17)

$$P_2(l,\ t) = 2\lambda\,[\sigma_2 P_1(0,\ 0)\,l]^2\exp(-8t^2/\tau_1^2). \tag{2.6.19}$$

L'impulsion de deuxième harmonique disponible à la sortie du cristal est de forme gaussienne, de même que l'impulsion de rayonnement fondamental, mais sa durée est $\sqrt{2}$ fois plus petite.

Portant (2.6.18) dans (2.6.14), on trouve l'énergie de l'impulsion d'entrée de rayonnement fondamental

$$E_1(0) = P_1(0,\ 0)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-4t^2/\tau_1^2)\,d\tau = \sqrt{\pi}\,\tau_1 P_1(0,\ 0)/2. \tag{2.6.20}$$

Introduisant l'expression (2.6.19) dans (2.6.15), on trouve l'énergie de l'impulsion de sortie du deuxième harmonique

$$E_2(l) = \sqrt{\pi/2}\,\lambda\tau_1\,[\sigma_2 P_1(0,\ 0)\,l]^2. \tag{2.6.21}$$

D'où on obtient suivant (2.6.16)

$$\eta_E = E_2(l)/E_1(0) = \sqrt{2}\,\lambda\sigma_2^2 l^2 P_1(0,\ 0). \tag{2.6.22}$$

Pour le cas du *faisceau lumineux divergent* utilisons les résultats du § 2.5. En faisant usage des expressions (2.5.16), (2.6.17) et (2.5.25), écrivons pour la puissance $P_2(l,\ t)$ dans l'approximation quasi statique l'expression suivante:

$$\boxed{P_2(l,\ t) = 2\lambda\,[\sigma_2 P_1(0,\ t)\,l]^2\left(\frac{\mathrm{Si}\,2\Omega}{\Omega} - \frac{\sin^2\Omega}{\Omega^2}\right).} \tag{2.6.23}$$

De même que dans le cas des ondes planes, $P_2(l,\ t) \sim P_1^2(0,\ t)$ (remarquons que Ω est indépendant du temps). Pour l'impulsion gaussienne de rayonnement fondamental (2.6.18), on en tire le résultat suivant exprimant le coefficient de conversion en énergie en deuxième harmonique:

$$\eta_E = \sqrt{2}\,\lambda\sigma_2^2 l^2 P_1(0,\ 0)\left(\frac{\mathrm{Si}\,2\Omega}{\Omega} - \frac{\sin^2\Omega}{\Omega^2}\right). \tag{2.6.24}$$

Régime non linéaire de génération de deuxième harmonique. — Nous allons étudier ce régime pour les ondes planes dans le cas où la

[1]) En appliquant ici l'approximation des ondes planes, on pourrait considérer un faisceau d'ouverture infinie; dans ces conditions, au lieu de la puissance et de l'énergie il faudrait faire intervenir leurs densités.

condition de synchronisme de phase est exactement satisfaite. Nous partirons de la relation (2.4.49) dans laquelle il faut poser $\varkappa = 1$ (puisque $\Delta k = 0$). Comme $\mathrm{sn}\,(u;\ 1) = \mathrm{th}\,u$, $u\,(t) = l\sqrt{\sigma_1\sigma_2} \times$ $\times\ a_1\,(0,\ t)$, $a_1\,(0,\ t) = \sqrt{8\pi P_1\,(0,\ t)/cn\,(\omega)\,s}$, on déduit de (2.4.49) l'expression suivante pour $P_2\,(l,\ t)$ à l'approximation quasi statique :

$$\boxed{P_2\,(l,\ t) = \frac{n\,(2\omega)\,\sigma_2}{n\,(\omega)\,\sigma_1}\,P_1\,(0,\ t)\,\mathrm{th}^2\left(l\sqrt{8\pi\sigma_1\sigma_2 P_1\,(0,\ t)/cn\,(\omega)\,s}\right).} \tag{2.6.25}$$

Il est facile de voir qu'à la différence de l'approximation du champ constant de rayonnement fondamental, lors de la conversion de l'onde fondamentale en deuxième harmonique en régime non linéaire la forme gaussienne de l'impulsion initiale ne se conserve pas.

Sur la fig. 2.25 on a montré certaines des fonctions $P_1\,(0,\ t)$ concrètes qui permettent de trouver analytiquement les expressions pour l'énergie $E_2\,(l)$ et

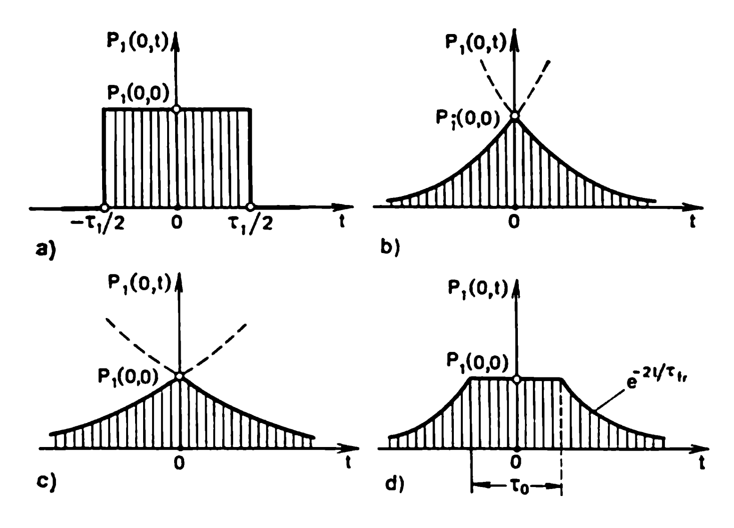


Fig. 2.25

pour le coefficient de conversion η_E [on porte ces fonctions dans (2.6.25) et on effectue l'intégration suivant (2.6.14) et (2.6.15)]. En utilisant une impulsion rectangulaire de rayonnement fondamental (fig. 2.25, *a*)

$$P_1\,(0,\ t) = \begin{cases} P_1\,(0,\ 0) & \text{pour } -\tau_1/2 \leqslant t \leqslant \tau_1/2\,; \\ 0 & \text{pour } |\,t\,| > \tau_1/2, \end{cases} \tag{2.6.26}$$

on obtient pour η_E l'expression suivante :

$$\eta_E = \mathrm{th}^2\,u_0, \tag{2.6.27}$$

où

$$u_0 = l\,(8\pi\sigma_1\sigma_2 P_1\,(0,\ 0)/cn\,(\omega)s)^{1/2}. \qquad (2.6.28)$$

Pour une impulsion à fronts d'entrée et de sortie de forme exponentielle (fig. 2.25, *b*)

$$P\,(0,\ t) = P_1\,(0,\ 0)\exp\,(-2\,|\,t\,|/\tau_{fr}) \qquad (2.6.29)$$

(τ_{f_1} est la durée du front d'entrée au niveau de 1/e d'amplitude), on trouve

$$\eta_E = 1 - 2\,\mathrm{th}\,u_0/u_0 + 2\ln\,(\mathrm{ch}\,u_0)/u_0^2. \qquad (2.6.30)$$

Pour une impulsion de forme triangulaire-hyperbolique (fig. 2.25, *c*)

$$P_1\,(0,\ t) = P_1\,(0,\ 0)\,(1 + \alpha\,|\,t\,|)^{-2} \qquad (2.6.31)$$

on trouve

$$\eta_E = 1 - \mathrm{th}\,u_0/u_0. \qquad (2.6.32)$$

Dans le cas d'une impulsion trapézoïdale à fronts d'entrée et de sortie de forme exponentielle (fig. 2.25, *d*) on obtient

$$\eta_E = \left[2E'\left(1 - 2\frac{\mathrm{th}\,u_0}{u_0} + 2\frac{\ln\,(\mathrm{ch}\,u_0)}{u_0^2}\right) + E''\,\mathrm{th}^2\,u_0\right]\Big/P_1\,(0,\ 0)\,(\tau_0 + \tau_{fr}), \qquad (2.6.33)$$

où $E' = P_1\,(0,\ 0)\tau_{fr}/2$ est l'énergie émise par la partie à variation temporelle exponentielle de l'impulsion de l'onde fondamentale; $E'' = P_1\,(0,\ 0)\ \tau_0$, l'énergie émise par le plateau de l'impulsion de durée τ_0.

La fig. 2.26 représente les courbes de variation du coefficient de conversion η_E en fonction du paramètre u_0 pour différentes formes de l'impulsion d'entrée de l'onde fondamentale: *1*, pour l'impulsion (2.6.26); *2*, pour l'impulsion (2.6.29); *3*, pour l'impulsion (2.6.31).

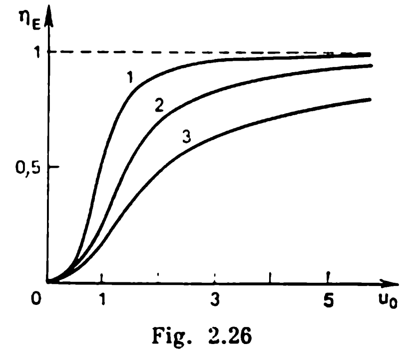


Fig. 2.26

Au fur et à mesure que l'impulsion de rayonnement fondamental se propage dans le cristal non linéaire, sa forme se modifie par suite du transfert d'énergie au deuxième harmonique. C'est le sommet de l'impulsion qui se caractérise par la plus grande puissance. La réaction du deuxième harmonique sur l'onde fondamentale est la plus intense précisément au sommet de l'impulsion; lorsque les coefficients de conversion sont suffisamment élevés, le sommet de l'impulsion de rayonnement fondamental ayant traversé le cristal se trouve aplati (pour $u_0 > 1{,}5$), alors que pour $u_0 \approx 5$ à 6 on observe une « corrosion » du sommet de l'impulsion. Ces effets peuvent se manifester pratiquement pour des coefficients de conversion en énergie égaux approximativement à 50 ou 70 %. Dans de telles conditions le coefficient de conversion en puissance peut atteindre, pour le sommet, 100 %, ce qui peut provoquer à son tour un transfert inverse de puissance de l'onde du deuxième harmonique à l'onde fondamentale (conversion dite paramétrique de fréquence de la lumière; v. chap. 5).

§ 2.7. Génération de deuxième harmonique dans un faisceau d'ouverture finie spatialement modulé (approximation de l'optique géométrique)

Faisceau lumineux d'ouverture finie et dérivées secondes des amplitudes par rapport aux coordonnées spatiales. — En étudiant les faisceaux lumineux d'ouverture *finie*, il faut prendre en considération la variation des amplitudes de champ non seulement en fonction des coordonnées longitudinales mais également des coordonnées *transversales* [1]). Dans ce cas, au lieu de (2.2.2) on peut se servir de l'expression suivante pour l'intensité de champ lumineux (dans le cas du synchronisme *ooe* scalaire):

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \frac{1}{2}\{\mathbf{e}_1 A_1(x, y, z)\exp[i(\omega t - kz)] + \\ + \mathbf{e}_2 A_2(x, y, z)\exp[i(2\omega t - Kz)] + \text{c.c.}\}. \quad (2.7.1)$$

En utilisant (2.7.1) et en reprenant les opérations effectuées au § 2.2, on obtient pour les amplitudes le système suivant d'équations différentielles (dans ce calcul on fait usage de la relation rot rot $\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E}$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{1}{2ik}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right) + \delta_1 A_1 &= -i\sigma_1 A_1^* A_2 e^{-i\Delta kz}; \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{1}{2iK}\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right) + \delta_2 A_2 &= -i\sigma_2 A_1^2 e^{i\Delta kz}. \end{aligned}\right\} \quad (2.7.2)$$

Tenons compte de ce que

$$\partial A/\partial z \gg \lambda \partial^2 A/\partial z^2, \quad (2.7.3)$$

où λ est la longueur d'onde émise [rappelons (2.2.14)]. De ce fait, les termes en dérivées secondes des amplitudes par rapport à la coordonnée longitudinale peuvent être négligés, ce qui permet de se servir du système d'équations suivant [12]:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{1}{2ik}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}\right) + \delta_1 A_1 &= -i\sigma_1 A_1^* A_2 e^{-i\Delta kz}; \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{1}{2iK}\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}\right) + \delta_2 A_2 &= -i\sigma_2 A_1^2 e^{i\Delta kz}. \end{aligned}} \quad (2.7.4)$$

Fait significatif, en négligeant les dérivées secondes par rapport à la coordonnée longitudinale, on ne peut pas négliger en même temps

[1]) Au § 2.5, l'amplitude de champ de rayonnement fondamental était supposée constante suivant la section transversale du faisceau; à la frontière du faisceau, elle tombait brutalement jusqu'à zéro. Une telle représentation est approchée. En réalité, le faisceau de lumière n'a pas de frontière précise.

les dérivées secondes par rapport aux coordonnées transversales parce que

$$(\partial^2 A/\partial x^2 \approx \partial^2 A/\partial y^2) \gg \partial^2 A/\partial z^2. \qquad (2.7.5a)$$

Ceci est facile à saisir si l'on tient compte du fait que l'ouverture d_0 du faisceau est beaucoup plus petite que la longueur du cristal: $d_0 \ll l$. C'est pourquoi la variation de l'amplitude depuis zéro jusqu'à sa valeur maximale s'effectue sur une *distance* notablement *plus courte* dans le sens transversal que dans le sens longitudinal. On peut considérer que

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \Big/ \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \approx \left(\frac{l}{d_0}\right)^2 \approx 10^2 \text{ à } 10^3 \qquad (2.7.5b)$$

(ici on a pris $l = 1$ à 3 cm, $d_0 = 1$ mm).

Pour prendre la décision de conserver ou non dans les équations tronquées les termes en $\partial^2 A/\partial x^2$ et $\partial^2 A/\partial y^2$, il convient de comparer $\lambda\partial^2 A/\partial x^2$ et $\partial A/\partial z$. Bien que le rapport $\lambda \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \Big/ \frac{\partial A}{\partial z}$ soit sensiblement plus grand que le rapport $\lambda \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \Big/ \frac{\partial A}{\partial z}$, il peut cependant s'avérer suffisamment petit dans le domaine optique (par suite de la petitesse de λ). Désignons le rapport $\lambda \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \Big/ \frac{\partial A}{\partial z}$ par p. On peut considérer que de façon approchée

$$p \geqslant \lambda l/d_0^2. \qquad (2.7.6)$$

On voit que dans le domaine optique (par exemple, pour $\lambda = 1$ μm), $p \gtrsim 10^{-2}$.

Physiquement, les termes en $\partial^2 A/\partial x^2$ et $\partial^2 A/\partial y^2$, intervenant dans les équations tronquées, permettent de tenir compte du phénomène de *diffraction* dû à la valeur finie de l'ouverture du faisceau lumineux. Le rapport p étant petit dans le domaine optique, les faisceaux d'ouverture finie peuvent être étudiés de façon approchée sans tenir compte de la diffraction (à l'approximation de *l'optique géométrique*). A cette approximation, les termes en dérivées $\partial^2 A/\partial x^2$ et $\partial^2 A/\partial y^2$ sont *omis* dans les équations tronquées [1]). C'est ainsi qu'a été étudiée au § 2.5 la génération de deuxième harmonique dans un faisceau lumineux divergent. Au cours du présent paragraphe les faisceaux d'ouverture finie à modulation spatiale seront examinés eux aussi à l'approximation de l'optique géométrique. Les phénomènes *de diffraction* seront pris en compte au § 2.8.

Faisceau lumineux spatialement modulé considéré à l'approximation de l'optique géométrique. — Représentons le faisceau lumi-

---

[1]) Rappelons qu'à l'approximation de l'optique géométrique les amplitudes des rayons ayant des coordonnées x et y différentes ne sont pas liées entre elles.

neux par l'ensemble des *rayons partiels*, parallèles à l'axe des z, dont l'intensité est *spatialement modulée* à l'entrée du cristal. Pour un rayon partiel quelconque (de coordonnées x, y), on peut calculer la densité de puissance du deuxième harmonique $S_2(x, y, l)$ à la sortie du cristal. Un tel calcul se fait dans le cadre de l'approximation *des ondes planes*; on se sert alors des équations tronquées (2.7.4) dans lesquelles les dérivées secondes par rapport aux coordonnées x et y sont omises. Si l'on néglige l'absorption ($\delta_1 = \delta_2 = 0$), ces équations s'écrivent sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \partial A_1(x, y, z)/\partial z + i\sigma_1 A_1^* A_2 \exp(-i\Delta kz) = 0;\\ \partial A_2(x, y, z)/\partial z + i\sigma_2 A_1^2 \exp(i\Delta kz) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.7.7)$$

Les conditions aux limites sont

$$A_1(x, y, 0) = A_{10}(x, y); \; A_2(x, y, 0) = 0. \qquad (2.7.8)$$

En intégrant $S_2(x, y, l)$ sur la section transversale du faisceau lumineux, on peut trouver la puissance de sortie du deuxième harmonique $P_2(l)$.

Les relations (2.7.7) et (2.7.8) sont analogues aux expressions (2.6.11) et (2.6.12). Signalons à ce propos l'analogie qui existe entre l'approximation *quasi statique* et celle *de l'optique géométrique.* Dans les deux cas, on utilise les mêmes équations tronquées. La différence est qu'à l'approximation quasi statique le paramètre fixé est le temps, alors qu'à celle de l'optique géométrique ce sont les coordonnées spatiales transversales. Cette *analogie spatio-temporelle* sera discutée plus en détail au § 3.6.

Supposons que la condition de synchronisme est satisfaite pour tous les rayons partiels. Si l'on passe des amplitudes complexes $A_{1,2}(x, y, z)$ aux amplitudes réelles $a_{1,2}(x, y, z)$ et l'on considère que le deuxième harmonique est comme d'habitude nul à l'entrée du cristal, on peut utiliser le résultat (2.3.23). Compte tenu de la modulation spatiale, ce résultat s'écrit sous la forme

$$a_2(x, y, l) = \sqrt{\sigma_2/\sigma_1}\, a_1(x, y, 0) \operatorname{th}[\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, a_1(x, y, 0)\, l]. \qquad (2.7.9)$$

En faisant usage de (2.4.41) et (2.4.42), on obtient

$$\eta_p = \frac{P_2(l)}{P_1(0)} =$$

$$= \frac{n(2\omega)\sigma_2 \iint_{-\infty}^{\infty} a_1^2(x, y, 0) \operatorname{th}^2[\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, a_1(x, y, 0)\, l]\, dx\, dy}{n(\omega)\sigma_1 \iint_{-\infty}^{\infty} a_1^2(x, y, 0)\, dx\, dy}. \qquad (2.7.10)$$

Supposons que le profil de l'onde fondamentale soit gaussien

$$a_1(x, y, 0) = a_0 \exp[-(x^2+y^2)/\rho_0^2]. \qquad (2.7.11)$$

Introduisant (2.7.11) dans (2.7.10), on obtient

$$\eta_p = 1 - 2\,\mathrm{th}\,u_0/u_0 + 2\ln(\mathrm{ch}\,u_0)/u_0^2, \tag{2.7.12}$$

où $u_0 = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}\,a_0 l$. Si

$$a_1(x, y, 0) = a_0\,[1 + (x^2 + y^2)/\rho_0^2]^{-1}, \tag{2.7.13}$$

la relation (2.7.10) donne

$$\eta_p = 1 - \mathrm{th}\,u_0/u_0. \tag{2.7.14}$$

Signalons que les relations (2.7.12) et (2.7.14) sont analogues aux relations (2.6.30) et (2.6.32). C'est une des manifestations de l'analogie spatio-temporelle mentionnée plus haut.

Si, en plus de la répartition transversale hétérogène de la densité de la puissance d'entrée du rayonnement fondamental, il existe encore une divergence du faisceau lumineux, la densité de puissance du deuxième harmonique à la sortie du cristal sera une fonction complexe des coordonnées x, y. En particulier, le facteur $2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\,a_1(x, y, 0)$ figurant au dénominateur de l'expression donnant le désaccord réduit [v. (2.4.50a)] sera maintenant fonction de x et y; le désaccord réduit sera donc fonction des deux coordonnées transversales et non uniquement de la coordonnée transversale qui varie dans le plan de synchronisme (suivant l'angle θ).

Angle d'anisotropie. — La propagation d'un faisceau lumineux d'ouverture finie dans un cristal non linéaire peut donner lieu à un effet spécifique dû à l'*anisotropie* du cristal. Pour pouvoir tenir compte de cet effet il est nécessaire d'apporter quelques précisions dans la théorie étudiée au cours des paragraphes précédents.

Rappelons à ce propos trois circonstances. Premièrement, en vertu de (2.4.36) le vecteur densité de puissance d'une onde plane se décrit par la relation $\mathbf{S} = C^{te}\cdot[\mathbf{k}E^2 - \mathbf{E}(\mathbf{kE})]$, d'où il résulte que $\mathbf{SE} = C^{te}\cdot[(\mathbf{kE})\,E^2 - E^2\,(\mathbf{kE})] = 0$ et donc

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{S}. \tag{2.7.15}$$

Fig. 2.27

Deuxièmement, les équations de Maxwell pour le champ existant dans un diélectrique donnent $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ (et non pas $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$). Il s'ensuit que $\mathbf{Dk} = 0$ et donc

$$\mathbf{D} \perp \mathbf{k}. \tag{2.7.16}$$

Troisièmement, dans un milieu anisotrope, les vecteurs **D** et **E** ne se confondent en général pas en direction [v. (1.1.6)]:

$$\mathbf{D} \nparallel \mathbf{E}. \tag{2.7.17}$$

En se servant des résultats (2.7.15) à (2.7.17), on obtient la situation représentée sur la fig. 2.27.

Ainsi, en étudiant la propagation du champ de rayonnement dans un milieu anisotrope, il faut tenir compte de deux directions différentes : la direction du vecteur d'onde **k** (direction de la *normale*

au front de phase) et la direction du vecteur densité de puissance **S** (direction de *propagation de l'énergie de l'onde*). Remarquons qu'on lie d'habitude au vecteur d'onde **k** le terme « direction de propagation de l'onde ». Le vecteur **S** est appelé *vecteur de rayon*.

L'angle β que font entre elles les directions du vecteur d'onde **k** et du vecteur de rayon **S** (autrement dit, l'angle formé entre les vecteurs **E** et **D**) est appelé *angle d'anisotropie*. Dans un milieu isotrope cet angle est nul. Il est également nul dans les cristaux uniaxiaux pour les ondes ordinaires. Pour une onde extraordinaire se propageant sous un angle θ par rapport à l'axe optique du cristal (on a en vue la direction du vecteur d'onde), l'angle d'anisotropie β est déterminé à partir de la relation

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\theta\,(\xi^2 - 1)/(\xi^2 + \operatorname{tg}^2\theta), \tag{2.7.18}$$

où $\xi = n_e/n_o$. En notant $\Delta n = n_o - n_e$, récrivons (2.7.18) sous la forme

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\theta\left[\left(1 - \frac{\Delta n}{n_o}\right)^2 - 1\right] \Big/ \left[\left(1 - \frac{\Delta n}{n_o}\right)^2 + \operatorname{tg}^2\theta\right].$$

En tenant compte que $\Delta n/n_o \ll 1$, on obtient

$$\operatorname{tg}\beta \cong 2\operatorname{tg}\theta\,\frac{\Delta n}{n_o} \Big/ (1 + \operatorname{tg}^2\theta) = -\sin 2\theta\,\frac{\Delta n}{n_o}$$

Ainsi,

$$|\operatorname{tg}\beta| = \sin 2\theta\,(n_o - n_e)/n_o. \tag{2.7.19}$$

La relation (2.7.19) montre que $\beta = 0$ pour $\theta = 0$ et $\theta = 90°$. L'angle β prend sa valeur maximale pour $\theta = 45°$. Dans les cristaux non linéaires utilisés dans la pratique cette valeur maximale est comprise entre 1 et 3° environ.

Jusqu'ici, nous avons supposé que $\beta = 0$. Ceci signifie que les vecteurs **D** et **E**, ainsi que les vecteurs **S** et **k**, étaient supposés parallèles. Il est naturel que dans ces conditions on pouvait poser div **E** = 0 et utiliser, au lieu de la relation rigoureuse (2.2.7a), la relation approchée (2.2.7b). Les précisions évoquées plus haut, qu'il faut apporter dans la théorie, sont liées à la prise en compte de l'angle d'anisotropie β ou, en d'autres termes, à l'utilisation de la relation (2.2.7a).

Effet d'ouverture de diaphragme (synchronisme *ooe*). — La prise en compte de l'angle d'anisotropie permet d'examiner l'influence de la *biréfringence* d'un cristal non linéaire sur l'efficacité de la génération de deuxième harmonique. Pour des faisceaux de faible ouverture cette influence peut être considérable (v. [12]).

Proposons-nous de considérer un *synchronisme ooe scalaire*. Le vecteur d'onde **k** et le vecteur de rayon $\mathbf{S}_1$ de l'onde ordinaire de fréquence fondamentale et le vecteur d'onde de l'onde extraordinaire du deuxième harmonique ont une même direction, le long de l'axe

des z (le long de la direction de synchronisme). Quant au vecteur de rayon S_2 de l'onde du deuxième harmonique, il est orienté sous l'angle d'anisotropie β par rapport à l'axe des z (v. fig. 2.28; on y distingue: OA, l'axe optique du cristal; θ_s, l'angle de synchronisme; l, la longueur du cristal; d_0, l'ouverture du faisceau d'onde

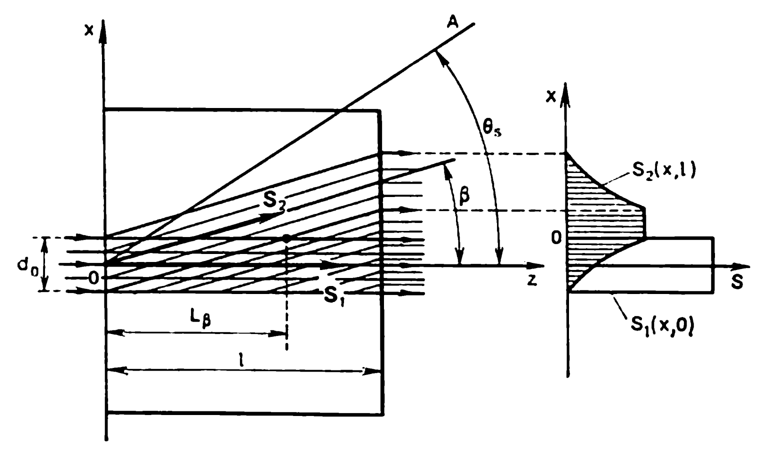


Fig. 2.28

fondamentale). L'angle d'anisotropie β se détermine à partir de la relation (2.7.19) dans laquelle les valeurs principales de l'indice de réfraction se rapportent à l'onde du deuxième harmonique:

$$|\operatorname{tg} \beta| = \sin 2\theta_s (n_{o2} - n_{e2})/n_{o2}. \qquad (2.7.20)$$

En examinant cette figure, on voit que la biréfringence provoque une *dérive* spatiale *de l'énergie* du deuxième harmonique par rapport au rayonnement fondamental. Cet effet diminue l'efficacité de la génération de deuxième harmonique; on lui donne le nom d'*effet d'ouverture de diaphragme* (*EOD*) [1]. Par suite de la dérive de l'énergie du deuxième harmonique l'ouverture de rayonnement du deuxième harmonique augmente à la sortie du cristal dans la direction de dérive (dans la direction de l'axe des x). La figure représente la répartition suivant l'axe des x de la densité de puissance de sortie du deuxième harmonique $S_2(x, l)$; on suppose que la densité de puissance du rayonnement d'entrée de l'onde fondamentale $S_1(x, 0)$ a un profil rectangulaire.

[1]) On distingue deux effets d'ouverture: *de diaphragme* et *d'angle*. Ce dernier est lié à la diminution de l'efficacité de la génération de deuxième harmonique par suite de la divergence du faisceau lumineux du rayonnement fondamental. L'effet d'angle d'ouverture a été examiné au § 2.5. Les deux effets d'ouverture peuvent être étudiés à l'approximation de l'optique géométrique.

Pour l'étude de l'effet d'ouverture de diaphragme on introduit un paramètre L_β appelé *longueur d'ouverture*:

$$L_\beta = d_0/\beta. \tag{2.7.21}$$

A une distance, suivant l'axe des z, égale à la longueur d'ouverture le rayon d'onde extraordinaire se trouve déplacé suivant l'axe des x d'une distance égale à l'ouverture d_0 du faisceau d'entrée de l'onde fondamentale. Comme cela a été dit plus haut, la dérive de l'énergie de l'onde extraordinaire a la valeur maximale, égale à environ 1°, pour $\theta_s = 45°$. Pour $d_0 = 1{,}5$ mm on obtient $L_\beta \approx 10$ cm. Dans le cas du synchronisme à 90°, l'énergie du deuxième harmonique ne subit pas de dérive (l'effet ne se manifeste pas; $L_\beta = \infty$).

Le caractère du processus de génération de deuxième harmonique en présence de l'effet d'ouverture de diaphragme est déterminé par la relation qui lie entre elles trois longueurs: l, L_β et L, où

$$L = [\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, a_1(0,\ 0)]^{-1} \tag{2.7.22}$$

est la *longueur d'interaction caractéristique*. Cette longueur a été exa minée au § 2.3 [v. (2.3.25)] où il a été montré que sur la longueur L il se produit un transfert effectif de la puissance de l'onde fondamentale en deuxième harmonique.

Si

$$l \ll L_\beta, \tag{2.7.23}$$

l'effet d'ouverture de diaphragme peut être négligé. Mais si l'inégalité (2.7.23) n'est pas vérifiée et de plus $l \gg L$, le régime non linéaire de génération de deuxième harmonique doit être étudié en tenant compte de l'effet d'ouverture de diaphragme. Si l'inégalité (2.7.23) n'est pas réalisée mais $l \ll L$, on peut utiliser l'approximation du champ constant du rayonnement d'onde fondamentale (compte tenu de l'effet d'ouverture de diaphragme).

Effet d'ouverture de diaphragme (synchronisme *oee*). — L'effet d'ouverture de diaphragme dans le cas du synchronisme *oee* scalaire est illustré à la fig. 2.29. Dans ce cas, il faut considérer deux angles d'anisotropie: l'un, β_1, formé entre les directions des vecteurs de rayon S_1^o (onde ordinaire de pulsation fondamentale) et S_1^e (onde extraordinaire de pulsation fondamentale) et l'autre, β_2, formé entre les directions de S_1^o et du vecteur de rayon S_2 de l'onde extraordinaire du deuxième harmonique. Signalons que tous les vecteurs d'onde sont orientés, de même que le vecteur de rayon S_1^o, le long de l'axe des z (le long de l'axe de synchronisme). Les angles β_1 et β_2 sont déterminés à partir des relations

$$\left.\begin{aligned} |\operatorname{tg}\beta_1| &= \sin 2\theta_s\,(n_{o1} - n_{e1})/n_{o1}\,; \\ |\operatorname{tg}\beta_2| &= \sin 2\theta_s\,(n_{o2} - n_{e2})/n_{o2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.7.24}$$

Vu ces deux angles d'anisotropie, on considère deux longueurs d'ouverture

$$L_{1\beta} = d_0/\beta_1\,; \qquad L_{2\beta} = d_0/\beta_2. \tag{2.7.25}$$

L'effet de diaphragme d'ouverture est plus dangereux dans le synchronisme *oee* que dans le synchronisme *ooe*. Si dans le synchronisme *ooe* la génération de deuxième harmonique s'effectue sur *toute*

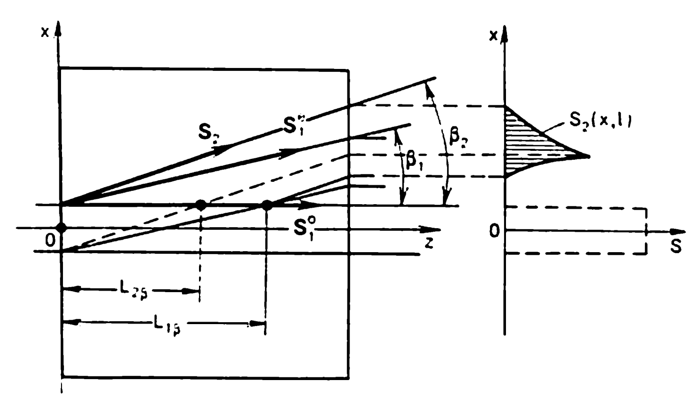


Fig. 2.29

la longueur du cristal non linéaire (bien qu'avec une efficacité plus faible qu'en l'absence de l'effet considéré), dans le synchronisme *oee* le deuxième harmonique n'est généré, de toute évidence, que sur la longueur $L_{1\beta}$ ou, plus exactement, dans les limites de la partie hachurée du faisceau. Dès que les faisceaux ordinaire et extraordinaire de rayonnement d'onde fondamentale cessent de se recouvrir, la génération de deuxième harmonique *cesse* elle aussi. Ceci peut influer de façon appréciable sur le profil de la densité de puissance du rayonnement de sortie du deuxième harmonique S_2 $(x,\ l)$ (ce profil est montré sur la fig. 2.29).

Méthode géométrique de calcul de l'efficacité de la génération de deuxième harmonique tenant compte de l'effet d'ouverture de diaphragme. — Nous supposerons que la densité de puissance du rayonnement fondamental à l'entrée du cristal est constante dans les limites de l'ouverture du faisceau. Dans ce cas, on peut tenir compte de l'effet de diaphragme d'ouverture en employant une méthode *géométrique* simple. L'essentiel de cette méthode est expliqué pour $l \leqslant L_\beta$, relativement au synchronisme *ooe*, à la fig. 2.30. On a montré sur cette figure un rayon *AA* du deuxième harmonique ayant à la sortie du cristal la coordonnée x. Pour ce rayon, désignons la densité de puissance de sortie par S_2 $(x,\ y,\ l)$ (la coordonnée y peut être choisie arbitrairement dans les limites de l'ouverture du

faisceau). Pour calculer $S_2(x, y, l)$ on peut user du résultat (2.4.49), obtenu pour $\Delta k = 0$, en le récrivant sous la forme

$$S_2(x, y, l) = \frac{n(2\omega)\sigma_2}{n(\omega)\sigma_1} S_1(0)\,\mathrm{th}^2\left[l(x)\sqrt{8\pi\sigma_1\sigma_2 S_1(0)/cn(\omega)}\right]. \qquad (2.7.26)[1]$$

Fait important, l'argument de la tangente hyperbolique contient $l(x)$, c'est-à-dire la *longueur d'interaction* pour le rayon lumineux choisi AA, et non la longueur l du cristal. La longueur d'interaction est la distance (comptée dans la direction des vecteurs d'onde, c'est-à-dire dans la direction de l'axe des z) sur laquelle le rayon choisi du deuxième harmonique se trouve situé dans les limites de la région occupée par le faisceau de rayonnement d'onde fondamentale (cette région est hachurée sur la figure). La figure montre encore deux rayons du deuxième harmonique; pour le rayon BB, la longueur d'interaction est égale à la longueur l du cristal, et pour le rayon CC, elle est égale à l'.

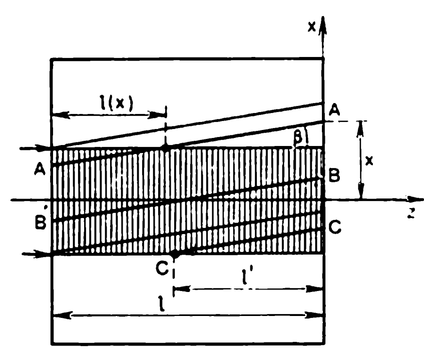


Fig. 2.30

Pour plus de simplicité, nous choisirons la section transversale du faisceau de rayonnement d'onde fondamentale en forme d'un carré (de côté d_0). La section du faisceau de deuxième harmonique à la sortie du cristal aura alors la forme d'un rectangle de côtés $d_0 + \beta l$ (suivant l'axe des x) et d_0 (suivant l'axe des y). L'intégration de $S_2(x, y, l)$ sur la surface de ce rectangle donne la puissance de sortie de deuxième harmonique

$$P_2(l) = d_0 \int_{-d_0/2}^{d_0/2 + l\beta} S_2(x, y, l)\,dx, \qquad (2.7.27)$$

et ensuite l'efficacité de la génération de deuxième harmonique (en puissance)

$$\eta_p = \frac{P_2(l)}{S_1(0)\,d_0^2} = \frac{1}{S_1(0)\,d_0} \int_{-d_0/2}^{d_0/2 + l\beta} S_2(x, y, l)\,dx. \qquad (2.7.28)$$

L'application de cette méthode ne permet d'obtenir des résultats analytiques qu'à l'*approximation du champ constant* du rayonnement

[1]) Rappelons à ce propos la relation (2.6.25).

fondamental (pour $l \ll L$). Dans ce cas, au lieu de (2.7.26) il convient d'utiliser l'analogue de la formule de Kleinman (2.4.46):

$$S_2(x, y, l) = \rho S_1^2(0)\, l^2(x), \qquad (2.7.29)$$

où $\rho = 8\pi n(2\omega)\,\sigma_2^2/cn^2(\omega)$.

Divisons en trois régions le rectangle représentant la section du faisceau de sortie du deuxième harmonique (fig. 2.31). Il est aisé de s'assurer que pour les rayons de l'harmonique qui quittent le

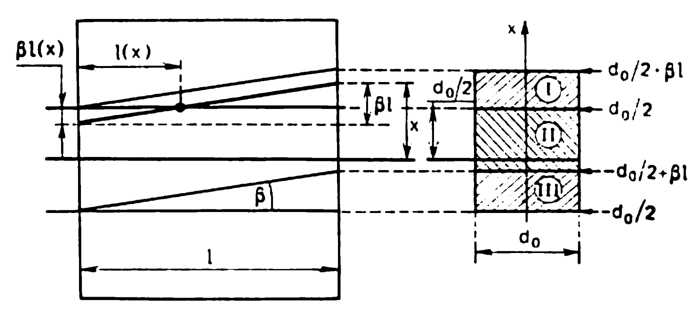


Fig. 2.31

cristal dans les limites de la région I on a $l(x)\,\beta = l\beta - x + d_0/2$. En tenant compte de (2.7.29), on obtient le résultat suivant pour la puissance $P_2(l;\ \mathrm{I})$ du deuxième harmonique, se rapportant à la région I de la section de sortie:

$$P_2(l;\ \mathrm{I}) = \frac{d_0 \rho S_1^2(0)}{\beta^2} \int\limits_{d_0/2}^{d_0/2+l\beta} \left(l\beta - x + \frac{d_0}{2}\right)^2 dx = \frac{d_0}{3}\,\rho S_1^2(0)\,\beta l^3. \qquad (2.7.30)$$

Il est évident que la même puissance se rapporte à la région III de la section de sortie:

$$P_2(l;\ \mathrm{III}) = P_2(l;\ \mathrm{I}) = \frac{d_0}{3}\,\rho S_1^2(0)\,\beta l^3. \qquad (2.7.31)$$

Pour les rayons du deuxième harmonique qui quittent le cristal dans les limites de la région II, la longueur d'interaction est égale à la longueur l du cristal; par conséquent

$$P_2(l;\ \mathrm{II}) = d_0 \rho S_1^2(0)\, l^2 \int\limits_{-d_0/2+l\beta}^{d_0/2} dx = d_0 \rho S_1^2(0)\, l^2 (d_0 - \beta l). \qquad (2.7.32)$$

En additionnant les résultats (2.7.30), (2.7.31), (2.7.32) et en tenant compte que $S_1(0)\, d_0^2 = P_1(0)$, on obtient

$$P_2(l) = \rho P_1^2(0)\, l^2 (1 - \beta l/3d_0)/d_0^2. \qquad (2.7.33)$$

On en déduit [compte tenu de (2.7.21)] que

$$\eta_p = \frac{8\pi n(2\omega)}{cn^2(\omega) d_0^2} \sigma_2^2 P_1(0) l^2 \left(1 - \frac{l}{3L_\beta}\right). \qquad (2.7.34)$$

Rappelons que cette relation est obtenue pour $l \leqslant L_\beta$.

Pour $l \geqslant L_\beta$, en développant des raisonnements analogues, on obtient la relation

$$\eta_p = \frac{8\pi n(2\omega)}{cn^2(\omega) \beta^2} \sigma_2^2 P_1(0) \left(\frac{l}{L_\beta} - \frac{1}{3}\right). \qquad (2.7.35)$$

Dans le cas du *synchronisme oee* et $\beta_2 > \beta_1$ écrivons, sans les démontrer, les expressions suivantes pour la puissance de sortie du deuxième harmonique:

a) pour $l < L_{2\beta}$

$$P_2(l) = \frac{8\pi n(2\omega)}{cn^2(\omega) d_0^2} \sigma_2^2 P_1^o(0) P_1^e(0) l^2 \left(1 - \frac{l}{3L_{1\beta}} - \frac{l}{3L_{2\beta}}\right); \qquad (2.7.36)$$

b) pour $l > L_{2\beta}$

$$P_2(l) = \frac{8\pi n(2\omega)}{3cn^2(\omega) \beta_1\beta_2} \sigma_2^2 P_1^o(0) P_1^e(0) \left[1 - \left(1 - \frac{l}{L_{1\beta}}\right)^3 \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}\right]. \qquad (2.7.37)$$

Remarquons que pour $l = L_{2\beta}$ la puissance du deuxième harmonique définie par la relation (2.7.37) atteint sa valeur *limite*

$$P_{2\,\max} = 8\pi n(2\omega) \sigma_2^2 P_1^o(0) P_1^e(0)/3cn^2(\omega) \beta_1\beta_2, \qquad (2.7.38)$$

qui ne dépend ni de d_0 ni de l.

Prise en compte de l'effet d'ouverture de diaphragme dans les équations tronquées (synchronisme *ooe* scalaire). — Toutes les expressions obtenues jusqu'ici pour les équations tronquées étaient fondées sur l'hypothèse où div **E** = 0. Autrement dit, les équations tronquées considérées jusqu'à présent supposaient que l'angle d'anisotropie était nul et donc ne tenaient pas compte de l'effet d'ouverture de diaphragme. Il est vrai que la méthode géométrique décrite plus haut permet d'en tenir compte dans le cadre des équations tronquées établies précédemment. Pourtant, ceci n'est possible que dans le cas où la densité de puissance du rayonnement fondamental est constante suivant l'ouverture du faisceau. Pour une étude correcte de l'effet d'ouverture de diaphragme la méthode géométrique n'est pas suffisante; il est nécessaire que les équations tronquées *elles-mêmes* fassent intervenir des directions différentes des vecteurs d'onde et de rayon de l'onde extraordinaire se propageant dans un milieu anisotrope. A cet effet, il faut renoncer à l'hypothèse où div **E** = 0 et au lieu de la relation approchée (2.2.7b) utiliser la relation rigoureuse (2.2.7a):

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}.$$

Ceci fait apparaître des termes *supplémentaires* dans les équations tronquées. Ainsi, dans le cas du synchronisme *ooe* scalaire, le terme supplémentaire $\beta \partial A_2/\partial x$ apparaît au premier membre de la seconde

équation du système (2.7.4). En posant $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ et en tenant compte de l'angle d'anisotropie β, récrivons (2.7.4) sous la forme suivante [12] :

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{1}{2ik}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}\right) + i\sigma_1 A_1^* A_2 \, e^{-i\Delta kz} = 0 ;$$
$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{1}{2ik}\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}\right) + i\sigma_2 A_1^2 \, e^{i\Delta kz} = 0. \qquad (2.7.39)$$

Tout en restant dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique, omettons dans (2.7.39) les termes en dérivées secondes des amplitudes par rapport aux coordonnées transversales. En outre, passons des amplitudes complexes $A_{1,2}$ aux amplitudes réelles $a_{1,2}$ et supposons que la condition de synchronisme est exactement satisfaite. On obtient alors le système suivant d'équations tronquées:

$$\partial a_1/\partial z + \sigma_1 a_1 a_2 = 0 ;$$
$$\partial a_2/\partial z + \beta \partial a_2/\partial x - \sigma_2 a_1^2 = 0. \qquad (2.7.40)\,[1]$$

Les conditions aux limites s'expriment par

$$a_1(x, y, 0) = a_{10}(x, y); \quad a_2(x, y, 0) = 0. \qquad (2.7.41)$$

En faisant disparaître a_1 dans (2.7.40), on trouve

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_2}{\partial z} + \sigma_1 a_2^2\right) + \beta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_2}{\partial z} + \sigma_1 a_2^2\right) = 0. \qquad (2.7.42)$$

Il s'ensuit que

$$\partial a_2/\partial z + \sigma_1 a_2^2 = f(x - \beta z, y), \qquad (2.7.43)$$

où la fonction f est déterminée par l'amplitude de l'onde fondamentale à l'entrée du cristal $a_{10}(x, y)$. En effet, pour $z = 0$, la relation (2.7.43) prend la forme $\partial a_2/\partial z \,|_{z=0} = f(x, y)$, alors que la seconde équation du système (2.7.40) devient $\partial a_2/\partial z \,|_{z=0} = \sigma_2 a_{10}^2(x, y)$. Ainsi,

$$f(x, y) = \sigma_2 a_{10}^2(x, y). \qquad (2.7.44)$$

L'équation (2.7.43) est connue sous le nom d'*équation de Riccati*. Compte tenu de (2.7.44) elle peut s'écrire sous la forme

$$\partial a_2/\partial z + \sigma_1 a_2^2(x, y, z) = \sigma_2 a_{10}^2(x - \beta z, y). \qquad (2.7.45)$$

[1]) Pour $\delta_1 = \delta_2 = 0$ et $\Psi = \pi/2$, le système (2.7.40) correspond, au terme $\beta\, \partial a_2/\partial x$ près, au système (2.3.1). La condition $\Psi = \pi/2$ correspond à la condition d'absence du deuxième harmonique à l'entrée du cristal [v. (2.3.17)].

Supposons que la répartition du champ de rayonnement fondamental à la limite soit de la forme

$$a_{10}(x, y) = a_1/(1 + \alpha^2 x^2) \qquad (2.7.46)$$

(l'amplitude a_{10} est indépendante de y dans les limites de l'ouverture du faisceau et s'annule brutalement à la limite du faisceau suivant l'axe y). Dans ce cas, la solution de l'équation (2.7.45), satisfaisant, sur la face d'entrée du cristal, à la condition $a_2 = 0$, se décrit par l'expression [12]

$$a_2(x, z) = \{\alpha^2\beta^2 z \operatorname{ch}\xi + [(\sigma^2 - \alpha^2\beta^2)^{1/2} - \alpha^4\beta^2 x (x - \beta z)(\sigma^2 - \alpha^2\beta^2)^{-1/2}] \times$$
$$\times \operatorname{sh}\xi\} \{\sigma_1 [1 + \alpha^2 (x - \beta z)^2] [\operatorname{ch}\xi + \alpha^2\beta x (\sigma^2 - \alpha^2\beta^2)^{-1/2} \operatorname{sh}\xi]\}^{-1}, \qquad (2.7.47)$$

où

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, a_0; \quad \xi = (\sigma^2 - \alpha^2\beta^2)^{1/2} \{\operatorname{arctg}(\alpha x) - \operatorname{arctg}[\alpha(x - \beta z)]\}/\alpha\beta.$$

Pour $L_\beta \gg L$, on tire de (2.7.47)

$$a_2(x, z) = a_0 \operatorname{th}[(z/L)(1 + \alpha^2 x^2)^{-1}]/(1 + \alpha^2 x^2), \qquad (2.7.48)$$

c'est-à-dire que nous sommes conduit à la solution pour les ondes planes dont l'amplitude de la fondamentale est modulée suivant (2.7.46) à condition que la biréfringence ne se produit pas ($\beta = 0$).

Si $\beta \neq 0$, les profils des ondes en interaction se modifient au cours de la propagation dans le cristal. Si $L_\beta \ll L$, il découle de (2.7.47) que

$$a_2(x, z) = (\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, a_0/2)\, L_\beta \{\alpha x/(1 + \alpha^2 x^2) -$$
$$- (\alpha x - z L_\beta^{-1})/[1 + (\alpha x - z L_\beta^{-1})^2] +$$
$$+ \operatorname{arctg}(\alpha x) - \operatorname{arctg}(\alpha x - z L_\beta^{-1})\}. \qquad (2.7.49)$$

La modification du profil d'onde dans le cas général, où $L_\beta \sim L$, est montrée à la fig. 2.32. Les lignes en traits interrompus montrent sur cette figure la densité relative de la puissance du rayonnement d'onde fondamentale à la sortie du cristal ($S_1 = [a_1(x, l)/a_0]^2$ et les lignes en traits continus la même puissance pour le deuxième harmonique ($S_2 = [a_2(x, l)/a_0]^2$). Les courbes sont construites pour $L_\beta^2 = 0{,}5L^2$, le rapport l/L_β étant pris égal à 0,5; 1,0; 5,0 (courbes *1*, *2*, *3* respectivement). En examinant cette figure, on voit que lorsque l augmente, le maximum de densité de puissance du deuxième harmonique se déplace suivant l'axe des x et que le maximum de densité de puissance du rayonnement fondamental se déplace en même temps en sens opposé. Ceci est lié à la non-linéarité du régime de génération de deuxième harmonique (épuisement du rayonnement fondamental dans la région de $x > 0$). Au fur et à mesure de la propagation dans le cristal la largeur du faisceau du deuxième harmonique augmente, alors que celle du faisceau de la fondamentale diminue.

Influence de l'effet d'ouverture de diaphragme sur l'efficacité de la génération de deuxième harmonique. — En intégrant le carré de la fonction (2.7.47) sur les coordonnées transversales, on obtient la puissance du deuxième harmonique, ce qui permet de trouver finalement le coefficient de conversion η_p. La fig. 2.33 représente la

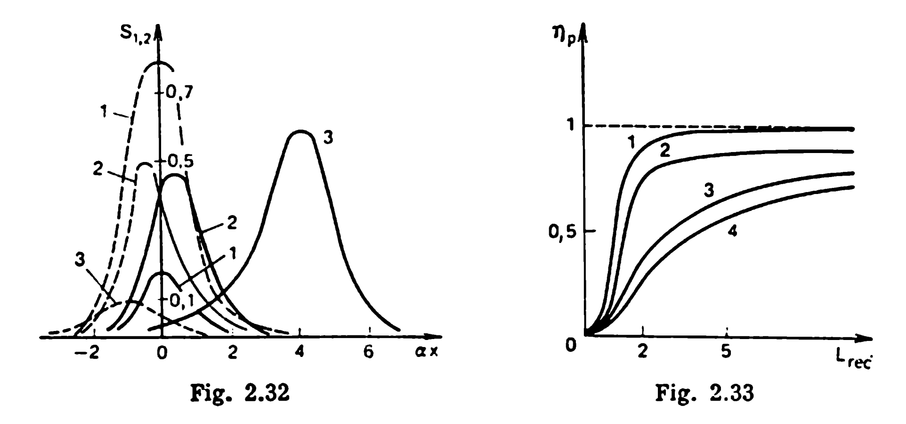


Fig. 2.32 Fig. 2.33

variation de η_p en fonction de la longueur du cristal *réduite* $L_{red} = l\,(L^{-1} + L_\beta^{-1})$; les courbes *2*, *3*, *4* sont construites pour le rapport L_β^2/L^2 égal à 10, 1, 0,5 respectivement, et la courbe *1* se rapporte au cas de l'onde plane (rapport L_β/L infiniment grand). On voit que η_p croît lorsque L_β/L augmente.

Ainsi, l'effet d'ouverture de diaphragme provoque une diminution notable de l'efficacité de la génération de deuxième harmonique. Comme il a été dit précédemment, le moyen radical permettant d'éliminer cet effet est l'utilisation du synchronisme à 90°. Pourtant pour beaucoup de cristaux non linéaires le synchronisme à 90° n'est pas réalisable dans le domaine de longueurs d'onde présentant un intérêt pratique. Aussi, la compensation de l'effet d'ouverture de diaphragme doit-elle être considérée comme un problème de grande importance pratique [1]).

Pour en finir avec les effets d'ouverture, faisons quelques remarques sur les influences comparatives des effets de diaphragme et d'angle sur le processus de génération de deuxième harmonique. Il est naturel que pour de larges faisceaux du rayonnement d'onde fondamentale dont la divergence est sensiblement plus grande que celle de diffraction, la longueur L_β est nettement supérieure à la longueur l du cristal si bien que l'effet d'ouverture d'angle joue un rôle prépondérant. D'un autre côté, pour les lasers monomodes dont le champ dans la zone proche est voisin du champ de la zone de Fresnel d'une onde plane diffractée par une ouverture ronde, le processus de génération de deuxième harmonique est

[1]) Les méthodes de compensation de l'effet d'ouverture de diaphragme seront examinées au § 3.7.

dominé par l'effet d'ouverture de diaphragme. Celui-ci est également prépondérant dans le cas des faisceaux de rayonnement fondamental de structure complexe, par exemple filamentaire (une telle structure peut apparaître par suite de l'auto-synchronisation de domaine des modes transverses).

§ 2.8. Génération de deuxième harmonique dans un faisceau gaussien focalisé (approximation du champ constant du rayonnement fondamental)

Remarques générales. — Dans les schémas de la génération de deuxième harmonique utilisés en pratique on a souvent recours à la *focalisation du rayonnement fondamental sur un cristal non linéaire* afin d'augmenter la densité de puissance et d'élever donc l'efficacité de la conversion. Supposons que le laser qui émet le rayonnement fondamental fonctionne en régime stationnaire de mode transverse

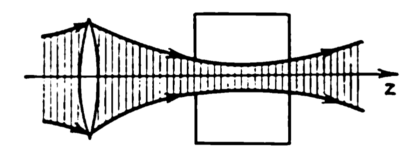


Fig. 2.34

d'ordre inférieur TEM_{00}; le faisceau laser est un faisceau gaussien et l'amplitude réelle du faisceau au point z se décrit par la fonction gaussienne des coordonnées transversales $\exp[-(x^2+y^2)/\rho^2(z)]$, où $\rho(z)$ est le rayon effectif du faisceau au point z. Pour assurer la focalisation du faisceau laser sur le cristal non linéaire on a recours à une mince lentille sphérique (fig. 2.34) [1]. Supposons également que le synchronisme réalisé est du type *ooe*. En outre, nous supposerons que le cristal non linéaire n'absorbe pas le rayonnement.

Dans la théorie de la génération de deuxième harmonique dans des faisceaux focalisés la prise en compte de la diffraction est une nécessité de principe. La propagation d'un faisceau gaussien dans l'espace se décrit sur la base de l'intégrale de diffraction de Kirchhoff-Huygens (v. [13]). Dans les équations tronquées, il devient maintenant nécessaire de faire intervenir les dérivées secondes des amplitudes par rapport aux coordonnées transversales.

Le diamètre d'un faisceau focalisé étant petit, on a généralement l'inégalité $L_\beta < l$; ceci signifie que l'on doit prendre en considération l'effet d'ouverture de diaphragme. Mais cet effet peut être éliminé si l'on utilise un cristal avec le synchronisme à 90°.

---

[1]) Dans certains schémas, au lieu de la lentille sphérique on utilise une lentille focalisatrice cylindrique. Dans un tel cas le faisceau gaussien est dépourvu de symétrie de révolution autour de l'axe z (faisceau gaussien elliptique).

Fait important, le problème sur la génération de deuxième harmonique dans un faisceau focalisé doit être optimisé. Il est évident qu'en cas d'une *faible* focalisation la densité de puissance du rayonnement focalisé peut se trouver insuffisante. D'un autre côté, une focalisation *forte* fait naître des limitations imposées à l'efficacité de la conversion et liées à une divergence accrue du rayonnement (ainsi

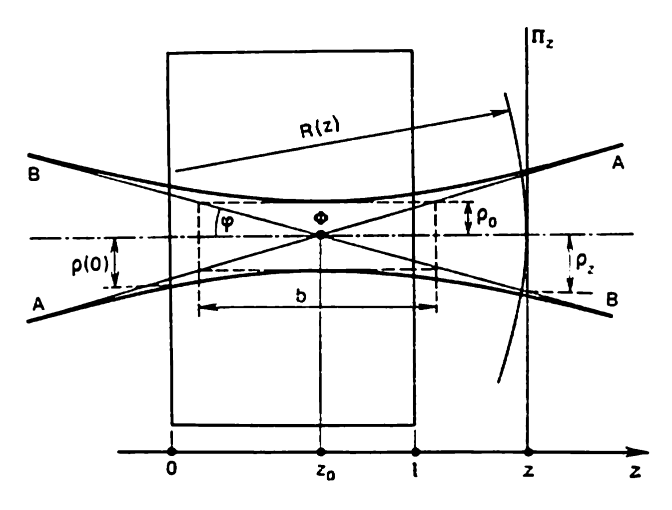


Fig. 2.35

qu'à l'intensification de l'effet d'ouverture de diaphragme). L'optimisation du problème exige, comme il sera montré plus loin, d'utiliser un désaccord d'onde bien déterminé (désaccord optimal) pour la partie axiale du faisceau.

Signalons, pour en finir avec les généralités, que pour l'étude théorique de la génération stationnaire de deuxième harmonique dans un faisceau focalisé on admet l'*approximation du champ constant* du rayonnement fondamental [14]. Cette approximation permet dans beaucoup de cas de décrire d'une manière suffisamment correcte le problème considéré.

Faisceau gaussien focalisé sur le cristal. — La fig. 2.35 représente la section longitudinale d'un faisceau gaussien focalisé sur un cristal non linéaire. Sur cette figure on distingue : les lignes en traits forts, la caustique du faisceau ; *AA* et *BB*, les asymptotes de la caustique ; φ, la moitié de l'angle de divergence du faisceau ; ρ_0, le rayon du cross-over du faisceau ; ρ (0), le rayon du faisceau à l'entrée du cristal (pour $z = 0$) ; z_0, la distance entre le cross-over du faisceau (le foyer Φ) et la face d'entrée du cristal. Sur la figure on a choisi un plan de référence Π_z passant par un certain point z situé sur l'axe

du faisceau; $\rho(z)$ et $R(z)$ sont respectivement le rayon du faisceau et le rayon du front d'onde pour le plan de référence choisi.

Indiquons les relations fondamentales qui décrivent la forme spatiale d'un faisceau gaussien circulaire (relativement à la fig. 2.35) [1]:

$$\boxed{\varphi = 2/k\rho_0} \qquad (2.8.1)$$

[on voit que l'angle de divergence est d'autant plus grand que le rayon de cross-over est plus petit (que la focalisation est plus forte); k est le vecteur d'onde émise dans le cristal];

$$\boxed{\rho^2(z) = \rho_0^2 + (z - z_0)^2\varphi^2;} \qquad (2.8.2)$$

$$\boxed{\rho^2(z) = (z - z_0)\,R(z)\,\varphi^2.} \qquad (2.8.3)$$

Lorsque $z \to z_0$, le premier membre de la relation (2.8.3) tend vers ρ_0^2, et le second membre, vers zéro; par voie de conséquence, $1/R(z_0) = 0$ (au foyer Φ le front d'onde est un plan perpendiculaire à l'axe du faisceau).

La grandeur

$$b = k\rho_0^2 = 2\rho_0/\varphi \qquad (2.8.4)$$

est appelée *paramètre confocal*. C'est la longueur du rectangle dessiné sur la fig. 2.35 en traits interrompus. Ce rectangle représente la section longitudinale d'un cylindre de rayon ρ_0 que l'on appelle *« tache » focale*.

Le rapport

$$\xi = l/b = \varphi l/2\rho_0 \qquad (2.8.5)$$

est le *paramètre de focalisation*. Dans le cas d'une focalisation faible ($\xi \ll 1$), on peut négliger la courbure du front d'onde et considérer la génération de deuxième harmonique à l'approximation des ondes planes modulées dans l'espace par la fonction de Gauss.

La position relative du foyer Φ à l'intérieur du cristal est déterminée par le paramètre

$$\mu = (l - 2z_0)/l. \qquad (2.8.6)$$

Si le foyer se situe au milieu du cristal ($z_0 = l/2$), $\mu = 0$.

L'expression de l'amplitude complexe du rayonnement fondamental constitué par un faisceau gaussien est de la forme

$$\boxed{A_1(x, y, z) = A_{10}(1 + i\tau)^{-1}\exp[-(x^2 + y^2)/\rho_0^2(1 + i\tau)],} \qquad (2.8.7)$$

[1]) Les faisceaux gaussiens sont examinés par exemple aux §§ 2.7 et 2.8 de [15]; voir aussi [13], [16].

où

$$\tau = 2(z - z_0)/k\rho_0^2 = 2(z - z_0)/b = (z - z_0)\,\varphi/\rho_0. \qquad (2.8.8)$$

En faisant usage de la relation (2.8.8) ainsi que des relations (2.8.1) à (2.8.3), on s'assure aisément que

$$\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\rho_0^2(1+i\tau)}\right] = \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\rho^2(z)}\right]\exp\left[ik\,\frac{x^2+y^2}{2R(z)}\right]. \qquad (2.8.9)$$

Le premier facteur exponentiel au second membre de (2.8.9) décrit la dépendance de l'amplitude réelle du faisceau vis-à-vis des coordonnées transversales (fonction de Gauss) tandis que le second terme est lié à la courbure du front d'onde (la phase dépend des coordonnées transversales).

Dans le plan de cross-over ($z = z_0$) on a $\tau = 0$. Dans ce plan

$$A_1(x, y, z_0) = A_{10}\exp[-(x^2+y^2)/\rho_0^2]. \qquad (2.8.10)$$

D'où on déduit que

$$A_{10} = A_1(0, 0, z_0). \qquad (2.8.11)$$

Ainsi, la constante A_{10} figurant dans l'expression (2.8.7) est l'amplitude du faisceau au point Φ (au foyer).

Puisque, comme on peut s'en assurer aisément,

$$|(1+i\tau)^{-1}| = (1+\tau^2)^{-1/2} = \rho_0/\rho(z), \qquad (2.8.12)$$

on obtient conformément à (2.8.7) et (2.8.9)

$$\boxed{a_1(x, y, z) = |A_1| = A_{10}\exp[-(x^2+y^2)/\rho^2(z)]\,\rho_0/\rho(z).} \qquad (2.8.13)$$

En se servant de (2.8.13) et (2.4.40), on trouve l'expression suivante pour la densité de puissance de rayonnement dans une section quelconque Π_z du faisceau :

$$\boxed{S_1(x, y, z) = (cn(\omega)/8\pi)\,(\rho_0/\rho(z))^2 A_{10}^2\exp[-2(x^2+y^2)/\rho^2(z)].} \qquad (2.8.14)$$

Il en résulte que la puissance du rayonnement a pour expression

$$P_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int S_1\,dx\,dy = cn(\omega)\,A_{10}^2\rho_0^2/16. \qquad (2.8.15)$$

On voit que la puissance est indépendante de la coordonnée z de la section transversale. En particulier, à l'entrée du cristal

$$P_1(0) = cn(\omega)\,A_{10}^2\rho_0^2/16. \qquad (2.8.16)$$

Génération de deuxième harmonique en cas d'une faible focalisation. — Si $\xi \ll 1$, alors $\tau \ll 1$; dans ce cas, on peut poser $a_1(x, y, z) \approx A_{10} \exp[-(x^2 + y^2)/\rho_0^2]$ et considérer la génération de deuxième harmonique pour une onde plane modulée dans l'espace. Dans ces conditions, l'effet de diaphragme d'ouverture sera négligé. En faisant usage de (2.4.47) à l'approximation du champ constant du rayonnement d'onde fondamentale, écrivons, compte tenu de (2.8.14),

$$S_2(x, y, l) = \frac{cn(2\omega)}{8\pi} \sigma_2^2 l^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta k l}{2}\right) A_{10}^4 \exp\left(-4\frac{x^2+y^2}{\rho_0^2}\right). \quad (2.8.17)$$

On en déduit que

$$P_2(l) = (cn(2\omega)/32)\, \sigma_2^2 l^2 A_{10}^4 \operatorname{sinc}^2(\Delta k l/2)\, \rho_0^2. \quad (2.8.18)$$

En utilisant (2.8.16), on obtient pour l'efficacité de la conversion en puissance l'expression suivante:

$$\eta_P = (8n(2\omega)/cn^2(\omega))\, \sigma_2^2 l^2 P_1(0) \operatorname{sinc}^2(\Delta k l/2)/\rho_0^2. \quad (2.8.19)$$

Equations tronquées pour la génération de deuxième harmonique dans un faisceau gaussien focalisé à l'approximation du champ constant du rayonnement fondamental. — Si on ne se limite pas au cas particulier de la focalisation faible, on doit tenir compte de la diffraction. Ceci signifie qu'il faut se servir des équations tronquées faisant intervenir les dérivées secondes des amplitudes par rapport aux coordonnées transversales. Nous partirons du système d'équations (2.7.39). A l'approximation du *champ constant* du rayonnement fondamental il convient de négliger le terme $i\sigma_1 A_1^* A_2 \exp(-i\Delta k z)$ dans la première équation du système (ce terme est proportionnel à $\sigma_1 A_2$ et est donc une grandeur de deuxième ordre de petitesse). Ceci nous conduit au système suivant:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{1}{2ik}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}\right) = 0; \\ &\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{1}{2ik}\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}\right) + i\sigma_2 A_1^2 e^{i\Delta k z} = 0, \end{aligned}} \quad (2.8.20)$$

(Δk étant le désaccord d'onde pour la partie axiale du faisceau). La première équation du système (2.8.20) étant *parabolique*, on convient de donner au système (2.8.20) le nom d'*équations tronquées paraboliques.*

On se rend compte sans peine que le faisceau gaussien décrit par la relation (2.8.7) est solution de l'équation parabolique (v., par exemple, § 2.7 de [15])

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{1}{2ik}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}\right).$$

Notons que la conservation de la forme gaussienne du faisceau fondamental lors de la propagation dans un cristal non linéaire (et en particulier la constance de la puissance de rayonnement, traduite

par la relation (2.8.15), lors de la variation de la coordonnée z de la section transversale du faisceau) est une conséquence directe de l'approximation du champ constant du rayonnement fondamental.

Si l'on introduit (2.8.7) dans la deuxième équation du système (2.8.20), on peut obtenir une équation pour l'amplitude de deuxième harmonique $A_2(x, y, z)$. Pour la résolution de cette équation on utilise l'appareil des fonctions de Green. Sans l'exposer ici, nous indiquerons des raisonnements développés par Boyd-Kleinman [14], qui utilisent dans certaine mesure des concepts de l'optique géométrique mais permettent néanmoins d'obtenir des résultats qui s'accordent avec la théorie rigoureuse. Cette méthode, en certain sens *quasi géométrique*, de détermination de l'amplitude et de la puissance du deuxième harmonique sera appelée *méthode de Boyd-Kleinman.*

Méthode de Boyd-Kleinman. — Décrivons cette méthode en suivant l'ouvrage [14]. Choisissons un certain plan de référence Π_Z situé à une distance Z de l'entrée du cristal, cette distance étant inférieure à la longueur du cristal ($Z < l$). Au point (X, Y) de ce plan, le champ $\mathbf{E}_1$ du rayonnement d'onde fondamentale sera représenté sous la forme [cf. (2.8.7)]

$$\mathbf{E}_1(X, Y, Z, t) = \frac{\mathbf{e}_1 A_{10}}{1+iT} \exp\left[-\frac{X^2+Y^2}{\rho_0^2(1+iT)}\right] e^{i(\omega t - kz)}, \quad (2.8.21)$$

où $T = 2(Z - z_0)/k\rho_0^2 = 2(Z - z_0)/b$. L'onde $\mathbf{E}_1(X, Y, Z, t)$ induit dans le cristal une onde de polarisation quadratique $\mathbf{P}_{\text{nl}} = \chi : \mathbf{E}_1\mathbf{E}_1$. En utilisant (2.8.21), écrivons

$$\mathbf{P}_{\text{nl}}(X, Y, Z, t) = \frac{\mathbf{P}_0}{(1+iT)^2} \exp\left[-\frac{2(X^2+Y^2)}{\rho_0^2(1+iT)}\right] e^{i(2\omega t - 2kz)}, \quad (2.8.22)$$

où $\mathbf{P}_0 = \chi : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 A_{10}^2$.

Puis, utilisons l'équation d'onde tronquée (2.2.17) [1]; ce faisant, négligeons l'absorption (Im $\varepsilon = 0$). En tenant compte de (2.8.22), écrivons cette équation sous la forme

$$\frac{dA_2}{dZ} = \gamma \frac{|\mathbf{P}_0|}{(1+iT)^2} \exp\left[-\frac{2(X^2+Y^2)}{\rho_0^2(1+iT)}\right] \exp(i\Delta kZ), \quad (2.8.23)$$

où $\gamma = -i2\pi(2\omega)^2/Kc^2$.

Considérons dans le cristal un élément de volume situé entre les plans de référence Π_Z et $\Pi_{Z+\Delta Z}$ et « occupé » par l'onde de polarisation quadratique (v. région hachurée de la fig. 2.36). L'accroisse-

[1] C'est ici que Boyd et Kleinman se servent en fait des concepts de l'optique géométrique; le fait est que les équations tronquées obtenues au § 2.2 ne font pas intervenir les termes en dérivées secondes des amplitudes par rapport aux coordonnées transversales. Dans ce cas, la diffraction est prise en considération dans l'expression de l'amplitude du rayonnement fondamental [v. première équation du système (2.8.20)], alors que le passage de l'amplitude du rayonnement fondamental à celle du deuxième harmonique s'effectue de fait dans le cadre de l'optique géométrique.

ment de l'amplitude du deuxième harmonique ΔA_2 sur l'intervalle de Z à $Z + \Delta Z$ s'exprime en vertu de (2.8.23) par

$$\Delta A_2 = \frac{\gamma \mid \mathbf{P}_0 \mid}{(1+iT)^2} \exp\left[-\frac{2(X^2+Y^2)}{\rho_0^2(1+iT)}\right] \exp(i\Delta kZ)\,\Delta Z. \quad (2.8.24)$$

Il importe de noter qu'à l'approximation du champ constant du rayonnement fondamental l'accroissement ΔA_2 dans l'intervalle de Z à $Z + \Delta Z$ ne dépend pas de l'amplitude du deuxième harmonique au point Z. Ceci signifie que ΔA_2 peut être considéré comme l'amplitude du champ de deuxième harmonique dans le plan $\Pi_{Z+\Delta Z}$ « engendré » par la polarisation non linéaire *uniquement de la partie* du volume du cristal qui est comprise entre les plans Π_Z et $\Pi_{Z+\Delta Z}$. Le volume étant additif, l'accroissement de l'amplitude du deuxième harmonique peut donc être considéré dans ce cas comme une grandeur *additive*. Ceci permet d'énoncer le procédé suivant pour la détermination de l'amplitude du deuxième harmonique dans un certain *plan d'observation* Π_z (ce plan est choisi à l'extérieur du cristal à la distance $z - l$ de sa face de sortie ; les coordonnées transversales dans ce plan seront désignées par x et y). Partageons par la pensée le volume du cristal « occupé » par l'onde de polarisation quadratique en couches élémentaires d'épaisseur ΔZ (v. fig. 2.36). Puis, effectuons deux opérations. Premièrement, cherchons la contribution de chaque couche d'épaisseur ΔZ à l'amplitude cherchée $A_2(z)$. Deuxièmement, additionnons les contributions des couches différentes en intégrant sur la longueur du cristal non linéaire.

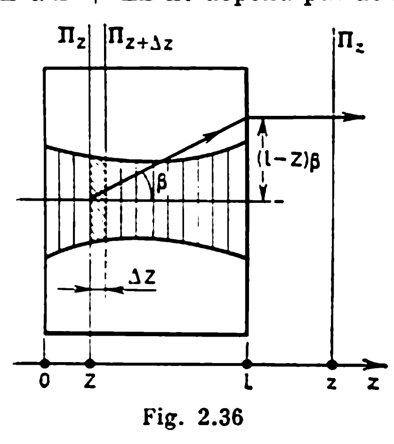


Fig. 2.36

En effectuant la première opération, il convient de tenir compte de l'effet d'ouverture de diaphragme : en se propageant du plan $\Pi_{Z+\Delta Z}$ jusqu'au plan Π_z, l'onde du deuxième harmonique se déplace suivant l'axe x. Ceci signifie que l'amplitude ΔA_2 au point x du plan Π_z est déterminée par l'amplitude ΔA_2 au point $X = x - (l - Z)\,\beta$ situé dans le plan $\Pi_{Z+\Delta Z}$ (v. fig. 2.36).

Il est facile de voir que l'expression (2.8.24) correspond à un faisceau gaussien

$$\Delta A_2 = \Delta V(Z)\frac{1}{1+iT} \exp\left[-2\frac{X^2+Y^2}{\rho_0^2(1+iT)}\right], \quad (2.8.25)$$

où $\Delta V(Z) = \gamma \mid \mathbf{P}_0 \exp(i\Delta kZ)\,\Delta Z \mid (1 + iT)$ peut être considéré comme amplitude du faisceau sur son axe dans le plan de cross-

over (au point Z). La relation (2.8.25) décrit le faisceau dans le plan $\Pi_{Z+\Delta Z}$. Pour passer au plan Π_z il faut effectuer dans (2.8.25) les substitutions suivantes (compte tenu de l'effet d'ouverture de diaphragme):

$$\frac{1}{1+iT_z}\exp\left[-2\frac{X^2+Y^2}{\rho_0^2(1+iT)}\right]\rightarrow\frac{1}{1+iT}\times$$
$$\times\exp\left[-2\frac{[x-(l-Z)\beta]^2+y^2}{\rho_0^2(1+i\tau)}\right].$$

Ici, au lieu de $T=2(Z-z_0)/b$, on utilise maintenant $\tau = 2(z-z_0)/b$; il est évident que dans le plan de cross-over ($\Delta V(Z)$) l'amplitude du faisceau reste inchangée. On obtient finalement

$$\Delta A_2(x,\ y,\ z;\ Z)=\frac{\Delta V(Z)}{1+i\tau}\exp\left[-2\frac{[x-(l-Z)\beta]^2+y^2}{\rho_0^2(1+i\tau)}\right]. \quad (2.8.26)$$

Puis, effectuons la seconde opération (additionnons les contributions au deuxième harmonique apportées par les différentes couches du cristal non linéaire):

$$A_2(x,\ y,\ z)=\int_{(Z)} dA_2(x,\ y,\ z;\ Z)=$$
$$=\frac{\gamma\,|\mathbf{P}_0|}{1+i\tau}\int_0^l\frac{\exp(i\Delta kZ)}{1+iT}\exp\left[-2\frac{[x-(l-Z)\beta]^2+y^2}{\rho_0^2(1+i\tau)}\right]dZ. \quad (2.8.27)$$

Considérons le champ du deuxième harmonique à une grande distance de la face de sortie du cristal (dans la *zone lointaine* de rayonnement) [1], c'est-à-dire pour des valeurs suffisamment élevées de τ. Dans ce cas

$$(1+i\tau)^{-1}\cong(1-i\tau)/\tau^2. \quad (2.8.28)$$

Introduisons les désignations

$$s=[x-(l-z_0)\beta]/\rho_0\tau;\quad s'=y/\rho_0\tau;\quad \alpha=\beta/\varphi. \quad (2.8.29)$$

Avec les nouvelles désignations on a $x-(l-Z)\beta = s\rho_0\tau+\alpha\rho_0 T$. En tenant compte de (2.8.28), on obtient

$$[x-(l-Z)\beta]^2/\rho_0^2(1+i\tau)\cong(1-i\tau)s^2(1+\alpha T/s\tau)^2\cong$$
$$\cong(1-i\tau)s^2-2is\alpha T. \quad (2.8.30)$$

[1]) Rappelons qu'à une grande distance du cross-over (dans la zone lointaine) le faisceau gaussien peut être considéré dans le cadre de l'optique géométrique. Il faut donc s'attendre que la méthode quasi géométrique de Boyd-Kleinman correspondra à la théorie rigoureuse justement dans la zone lointaine.

Finalement, au lieu de (2.8.27), on aura

$$A_2(x, y, z) = \frac{\gamma\,|\,\mathbf{P}_0\,|}{1+i\tau} \exp[-2(1-i\tau)(s^2+s'^2)] \times \\ \times \int_0^l \frac{\exp(i\Delta kZ)}{1+iT} e^{4isaT}\, dZ. \quad (2.8.31)$$

Fonction d'ouverture. — Introduisons les désignations

$$\nu = b\Delta k/2, \quad \nu' = \nu + 4as \quad (2.8.32)$$

et passons dans (2.8.31) de la variable d'intégration Z à la variable T:

$$\int_0^l \frac{\exp(i\Delta kZ)}{1+iT} e^{4isaT}\, dZ = \frac{b}{2} e^{i\Delta kz_0} \int_{-\xi(1-\mu)}^{\xi(1+\mu)} \frac{\exp(i\nu'T)}{1+iT}\, dT. \quad (2.8.33)$$

C'est ainsi qu'une *fonction* dite *d'ouverture* apparaît dans l'expression donnant l'amplitude du deuxième harmonique:

$$\boxed{H(\nu', \alpha, \xi, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\xi(1-\mu)}^{\xi(1+\mu)} \frac{\exp(i\nu'T)}{1+iT}\, dT.} \quad (2.8.34)$$

Il importe de noter que la même fonction s'obtient également dans la théorie rigoureuse.

Compte tenu de (2.8.33) et (2.8.34), récrivons (2.8.31) sous la forme

$$A_2(x, y, z) = \frac{\pi\gamma\,|\,\mathbf{P}_0\,|\,b}{1+i\tau} e^{i\Delta kz_0} \exp[-2(1-i\tau)(s^2+s'^2)]\, H. \quad (2.8.35)$$

On en tire pour l'amplitude réelle l'expression suivante:

$$a_2(x, y, z) = |\,A_2\,| = \frac{\pi\gamma\,|\,\mathbf{P}_0\,|\,b}{\tau} e^{-2(s^2+s'^2)}\,|\,H(\nu', \alpha, \xi, \mu)\,|. \quad (2.8.36)$$

où $|(1+i\tau)^{-1}| \cong 1/\tau$. En tenant compte que $|\,\mathbf{P}_0\,| \sim A_{10}^2$, $A_{10}^2 = 16P_1(0)/cn(\omega)\rho_0^2$, $b = k\rho_0^2$, récrivons (2.8.36) sous la forme

$$a_2(x, y, z) \sim (P_1(0)\,k/\tau)\, e^{-2(s^2+s'^2)}\,|\,H(\nu', \alpha, \xi, \mu)\,|. \quad (2.8.37)$$

On en trouve la densité de puissance du deuxième harmonique au point (x, y) situé dans le plan Π_z:

$$S_2(x, y, z) = C\,(P_1(0)\,k/\tau)^2\, e^{-4(s^2+s'^2)}\,|\,H(\nu', \alpha, \xi, \mu)\,|^2, \quad (2.8.38)$$

où C est un facteur qui n'a pas d'importance pour l'analyse qui suit.

En intégrant (2.8.38) sur les coordonnées transversales (autrement dit, sur s et s'), on obtient la puissance du deuxième harmonique

dans le plan Π_z :

$$P_2 = (\rho_0\tau)^2 \int\int_{-\infty}^{\infty} S_2(x(s), y(s'), z)\, ds\, ds' =$$

$$= CP_1^2(0)\, k^2\rho_0^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4s^2} \,|\, H(\nu', \alpha, \xi, \mu) \,|^2 ds. \quad (2.8.39)$$

Le résultat (2.8.39) est obtenu par la méthode de Boyd-Kleinman en considérant le champ du deuxième harmonique dans la zone lointaine, où, comme il a été noté précédemment, la méthode quasi géométrique de Boyd-Kleinman doit s'accorder avec la théorie rigoureuse puisqu'à une grande distance du plan de cross-over le faisceau gaussien peut être considéré dans le cadre de l'optique géométrique (comme une onde sphérique). Par voie de conséquence, le résultat (2.8.39) peut être interprété comme étant rigoureux. Si l'on tient compte du fait qu'après la sortie du cristal non linéaire la puissance du faisceau lumineux du deuxième harmonique devient indépendante de la coordonnée z du plan d'observation [on peut s'en assurer facilement en se référant à (2.8.39)], il n'est pas difficile de comprendre pourquoi le résultat obtenu par la méthode de Boyd-Kleinman pour la *zone lointaine* se confond avec l'expression obtenue pour la puissance du deuxième harmonique à la *sortie* d'un cristal non linéaire dans la théorie rigoureuse.

Si l'on introduit la fonction

$$h(\nu, \alpha, \xi, \mu) = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4s^2} \,|\, H(\nu', \alpha, \xi, \mu) \,|^2 ds, \quad (2.8.40)$$

le résultat (2.8.39) peut s'écrire sous la forme

$$P_2 = CP_1^2(0)\, klh(\nu, \alpha, \xi, \mu)/4\pi. \quad (2.8.41)$$

Remarquons que la fonction h se détermine par l'ensemble de tous les paramètres qui doivent, au point de vue physique, influer sur la génération de deuxième harmonique dans un faisceau focalisé. Enumérons ces paramètres : $\nu = b\Delta k/2$ (proportionnel au désaccord d'onde) ; $\alpha = \beta/\varphi$ (proportionnel à l'angle d'anisotropie) ; ξ, le paramètre de focalisation ; μ, la position relative du foyer à l'intérieur du cristal. Dans ce qui suit nous supposerons que $\mu = 0$; la position du foyer au milieu du cristal est optimale pour le transfert de puissance au deuxième harmonique.

Cas du synchronisme à 90°. — Dans ce cas, on le sait, $\beta = 0$ (et donc $\alpha = 0$, $\nu' = \nu$). La fonction d'ouverture (2.8.34) prend la

forme (pour $\mu = 0$)

$$H(\nu,\ 0,\ \xi,\ 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{\exp(i\nu T)}{1+iT}\, dT \qquad (2.8.42)$$

et donc

$$\boxed{h(\nu,\ 0,\ \xi,\ 0) = \frac{1}{4\xi} \left| \int_{-\xi}^{\xi} \frac{\exp(i\nu T)}{1+iT}\, dT \right|^2.} \qquad (2.8.43)$$

Pour $\xi \ll 1$ (*focalisation faible*), l'expression (2.8.43) devient

$$h = \frac{1}{4\xi} \left| \int_{-\xi}^{\xi} e^{i\nu T}\, dT \right|^2 = \sin^2(\nu\xi)/\xi\nu^2 = \xi\, \mathrm{sinc}^2(\Delta kl/2). \qquad (2.8.44)$$

Portons (2.8.44) dans (2.8.41), ce qui donne

$$P_2 = CP_1^2(0)\, l^2\, \mathrm{sinc}^2(\Delta kl/2)/4\pi\rho_0^2. \qquad (2.8.45)$$

Ainsi,

$$\eta_p = (C/4\pi)\, P_1(0)\, l^2\, \mathrm{sinc}^2(\Delta kl/2)/\rho_0^2. \qquad (2.8.46)$$

Il est facile de voir que le résultat (2.8.46) se confond avec le résultat (2.8.19) obtenu à l'approximation des ondes planes (avec modulation spatiale de l'amplitude par la fonction de Gauss).

Pour $\xi \gg 1$ (*focalisation serrée*), l'expression (2.8.43) prend la forme

$$h = \begin{cases} \frac{1}{\xi} \left| \pi \exp\left(\frac{\Delta kb}{2}\right) + \mathrm{Si}\left(-\frac{\Delta kl}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \right|^2 & \text{pour } \Delta k < 0; \\ \frac{1}{\xi} \left| \mathrm{Si}\left(\frac{\Delta kl}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \right|^2 & \text{pour } \Delta k > 0. \end{cases} \qquad (2.8.47)$$

La fig. 2.37 représente les courbes de variation de h en fonction de $\Delta kl/2$ pour différentes valeurs de ξ. La courbe *1* est obtenue pour $\xi \ll 1$ à l'aide de la formule (2.8.44), et les courbes *2* et *3* le sont pour $\xi = 10$ et $\xi = 100$ respectivement au moyen de la formule (2.8.47). Les courbes sont normées de telle sorte que pour $\Delta k = 0$ la fonction h soit égale à l'unité; la figure ne permet donc pas de juger des valeurs absolues de h. Comme il est visible sur cette figure, lorsque ξ augmente l'*asymétrie* de la fonction h par rapport au changement du signe de désaccord Δk devient plus marquée. On y voit également que pour $\xi = 10$, par exemple, la fonction h (et donc la puissance P_2) passe par un maximum non pas dans le cas où la condition de synchronisme est exactement satisfaite pour la partie axiale du faisceau mais pour un certain désaccord d'onde tel que $\Delta kl/2 \approx -3$. Ceci signifie qu'en effectuant la focalisation, il faut

choisir, pour une valeur donnée du paramètre ξ, un *désaccord d'onde optimal* Δk_{opt} situé dans la région des valeurs *négatives*. Autrement dit, il faut tourner spécialement le cristal non linéaire à partir de la direction du synchronisme d'un certain angle dans le sens correspondant à l'augmentation de l'angle formé entre l'axe optique du cristal et la direction de l'axe du faisceau.

On pourrait le prévoir en partant des considérations physiques simples. Rappelons que $\Delta k = 0$ est la condition de réalisation du synchronisme *ooe* scalaire ; dans ce cas $\theta = \theta_s^{(1)}$. Si $\Delta k < 0$ (autrement dit, si $\theta > \theta_s^{(1)}$), le synchronisme scalaire est altéré, mais les conditions sont créées pour la réalisation du synchronisme *ooe vectoriel*. (Rappelons que l'angle du synchronisme *ooe* vecto-

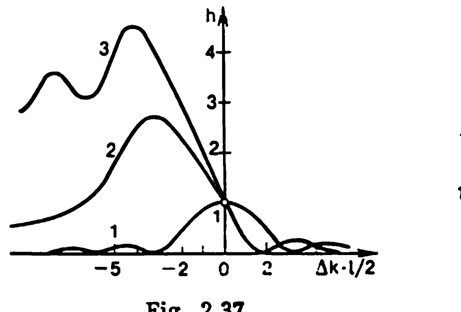


Fig. 2.37

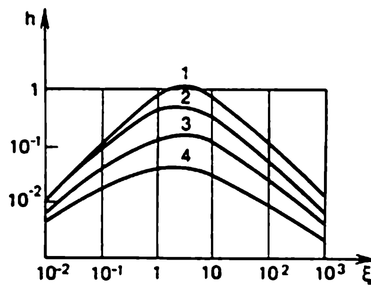


Fig. 2.38

riel est toujours plus grand que celui du synchronisme *ooe* scalaire.) Pour la réalisation de ces conditions il faut que la divergence du faisceau soit suffisamment grande. Ainsi, l'élévation de l'efficacité de la génération de deuxième harmonique dans la région de $\Delta k < 0$ peut être liée à la réalisation de la condition de synchronisme *ooe* vectoriel. Par contre, dans la région de $\Delta k > 0$ le synchronisme *ooe* ne se réalise pas, ni scalaire, ni vectoriel ; de ce fait, l'efficacité de la génération de deuxième harmonique accuse pour $\Delta k > 0$ une baisse considérable lorsque la focalisation est renforcée.

Pour obtenir une valeur *maximale* de la fonction h il faut de toute évidence l'optimiser *à la fois* suivant les deux paramètres : ξ et ν (la focalisation et le désaccord). Comme le montrent les calculs effectués sur ordinateur, la fonction h passe par un maximum au point $\xi_{\mathrm{opt}} = 2{,}84$, $\nu_{\mathrm{opt}} = -0{,}55$ $(\Delta k_{\mathrm{opt}} l/2 = \xi_{\mathrm{opt}} \nu_{\mathrm{opt}} = -1{,}6)$; dans ce cas, $h(\xi_{\mathrm{opt}}, \nu_{\mathrm{opt}}) = 1{,}07$.

Influence de l'effet d'ouverture de diaphragme. — Si $\beta \neq 0$, on doit utiliser la fonction $h(\nu, \alpha, \xi, 0)$ définie suivant (2.8.32), (2.8.34), (2.8.40) par la relation suivante (pour $\mu = 0$) :

$$h(\nu, \alpha, \xi, 0) = \frac{1}{2\xi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4s^2} \left| \int_{-\xi}^{\xi} \frac{\exp[i(\nu + 4\alpha s) T]}{1 + iT} \, dT \right|^2 ds. \qquad (2.8.48)$$

La fig. 2.38 représente les courbes de variation de h en fonction de ξ calculées à l'aide de la formule (2.8.48) pour différentes valeurs du paramètre α et un désac-

cord d'onde optimal (courbe *1*, pour $D = 0$; *2*, pour $D = 1$; *3*, pour $D = 4$; *4*, pour $D = 16$; ici $D = \alpha\varphi\sqrt{kl/2} = \beta\sqrt{kl/2}$). Il est facile de voir que l'effet d'ouverture de diaphragme peut provoquer une baisse considérable de l'efficacité de la conversion pour un faisceau focalisé. Si, par exemple, on a pour $D = 0$ $h_{max} = 1{,}07$ (dans ce cas $\xi_{opt} = 2{,}84$), pour $D = 16$, la valeur maximale de la fonction h est inférieure à 0,05 (dans ce cas $\xi_{opt} = 1{,}4$).

§ 2.9. Approximation de l'intensité constante du rayonnement fondamental

Au cours des paragraphes qui précèdent on a largement utilisé l'approximation du *champ constant* du rayonnement fondamental. A cette approximation on suppose constante l'amplitude complexe A_1 du champ de l'onde fondamentale; en d'autres termes, tant l'amplitude réelle a_1 que sa phase φ_1 sont supposées constantes:

$$a_1(z) = a_1(0); \quad \varphi_1(z) = \varphi_1(0). \tag{2.9.1}$$

Cette approximation permet de simplifier considérablement les calculs, mais elle conduit à la perte de l'information sur le caractère non linéaire de l'interaction des ondes et à la perte de beaucoup de particularités qualitativement importantes du processus de conversion de l'onde fondamentale en deuxième harmonique.

Une approximation plus justifiable au point de vue physique est celle de l'*intensité constante* du rayonnement fondamental [17]. A cette approximation, seule l'amplitude réelle a_1 est supposée constante et non sa phase:

$$a_1(z) = a_1(0); \quad \varphi_1(z) \neq \varphi_1(0). \tag{2.9.2}$$

Amplitude complexe du champ de deuxième harmonique à l'approximation de l'intensité constante. — En négligeant l'absorption, écrivons le système d'équations raccourcies (2.2.22) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} dA_1/dz &= -i\sigma_1 A_1^* A_2 \exp(-i\Delta kz); \\ dA_2/dz &= -i\sigma_2 A_1^2 \exp(i\Delta kz). \end{aligned}\right\} \tag{2.9.3}$$

Dérivons ces équations par rapport à z, il vient

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2A_1}{dz^2} &= -i\sigma_1\left(A_2\frac{dA_1^*}{dz} + A_1^*\frac{dA_2}{dz} - i\Delta kA_1^*A_2\right)\exp(-i\Delta kz); \\ \frac{d^2A_2}{dz^2} &= -i\sigma_2\left(2A_1\frac{dA_1}{dz} + i\Delta kA_1^2\right)\exp(i\Delta kz). \end{aligned}\right\} \tag{2.9.4}$$

En se servant de (2.9.3) et en introduisant pour les intensités des ondes les désignations suivantes

$$I_1 = A_1A_1^* = a_1^2; \quad I_2 = A_2A_2^* = a_2^2, \tag{2.9.5}$$ [1]

[1] Il ne faut pas identifier l'intensité $I = a^2$ et la densité de puissance $S = cna^2/8\pi = cnI/8\pi$.

mettons (2.9.4) sous la forme

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2A_1}{dz^2}+i\Delta k\frac{dA_1}{dz}-\sigma_1(\sigma_1 I_2-\sigma_2 I_1)A_1=0;\\ \frac{d^2A_2}{dz^2}-i\Delta k\frac{dA_2}{dz}+2\sigma_1\sigma_2 A_2 I_1=0.\end{aligned}\right\} \qquad (2.9.6)$$

A l'approximation de l'intensité constante du rayonnement fondamental il convient de poser

$$I_1(z)=I_1(0)\equiv I_{10}, \qquad (2.9.7)$$

ce qui met la seconde équation du système (2.9.6) sous la forme

$$d^2A_2/dz^2-i\Delta k dA_2/dz+2\sigma_1\sigma_2A_2I_{10}=0. \qquad (2.9.8)$$

La solution de cette équation satisfaisant aux conditions aux limites

$$A_2(0)=0 \quad \text{et} \quad (dA_2/dz)_{z=0}=-i\sigma_2A_1^2(0) \qquad (2.9.9)$$

peut être représentée sous la forme

$$\boxed{A_2(z)=-i\sigma_2A_1^2(0)\,z\exp(i\Delta kz/2)\operatorname{sinc}(\Lambda z)} \qquad (2.9.10)$$

avec

$$\Lambda=[(\Delta k/2)^2+2\sigma_1\sigma_2I_{10}]^{1/2}. \qquad (2.9.11)$$

Comparons (2.9.10) à l'expression (2.4.35a) qui décrit l'amplitude complexe du champ du deuxième harmonique à l'approximation du champ constant du rayonnement fondamental. En passant de (2.4.35a) à (2.9.10), on remplace le facteur sinc $(\Delta kz/2)$ par le facteur sinc (Λz) qui dépend, comme le montre la relation (2.9.11), non seulement du désaccord d'onde Δk mais également de l'intensité I_{10} du rayonnement fondamental. Il est facile de voir que pour des désaccords d'onde suffisamment grands, lorsque

$$\Delta k\gg 2\sqrt{2\sigma_1\sigma_2I_{10}}, \qquad (2.9.12)$$

l'approximation de l'intensité constante se confond avec l'approximation du champ constant.

Amplitude réelle et phase réelle du deuxième harmonique à l'approximation de l'intensité constante. — En introduisant les amplitudes réelles et les phases réelles, récrivons (2.9.10) [compte tenu que $-i=\exp(-i\pi/2)$] sous la forme

$$a_2(z)\exp(i\varphi_2(z))=\sigma_2a_1^2(0)\,z\operatorname{sinc}(\Lambda z)\exp[i(2\varphi_1(0)-\pi/2+\Delta kz/2)].$$

Il en résulte que

$$a_2(z)=\sigma_2a_1^2(0)\,z\operatorname{sinc}(\Lambda z); \qquad (2.9.13a)$$

$$\varphi_2(z)=2\varphi_1(0)-\pi/2+\Delta kz/2. \qquad (2.9.13b)$$

Comparons le résultat (2.9.13a) aux résultats correspondants obtenus de façon rigoureuse (c'est-à-dire en régime non linéaire) et à l'approximation du champ constant. Suivant (2.4.35a) l'approximation du champ constant donne

$$a_2(z) = \sigma_2 a_1^2(0)\, z\, \mathrm{sinc}(\Delta kz/2). \qquad (2.9.14)$$

En examinant le régime non linéaire, il convient de tenir compte des résultats du § 2.4. Dans ce cas [v. (2.4.20)]

$$a_2(z) = a_1(0)\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}(u\,;\,\varkappa), \qquad (2.9.15)$$

où $u = z\sigma_1 a_1(0)/\sqrt{\varkappa}$; $\sqrt{\varkappa} = \sqrt{1+(\Delta_1/2)^2} - \Delta_1/2$; $\Delta_1 = \Delta k/2\sigma_1 a_1(0)$.

La fig. 2.39 représente les dépendances de $|a_2(l)/a_1(0)|$ vis-à-vis de $\Delta kl/2$ obtenues pour $l = 2/\sqrt{\sigma_1\sigma_2 I_{10}}$ en régime non linéaire (courbe

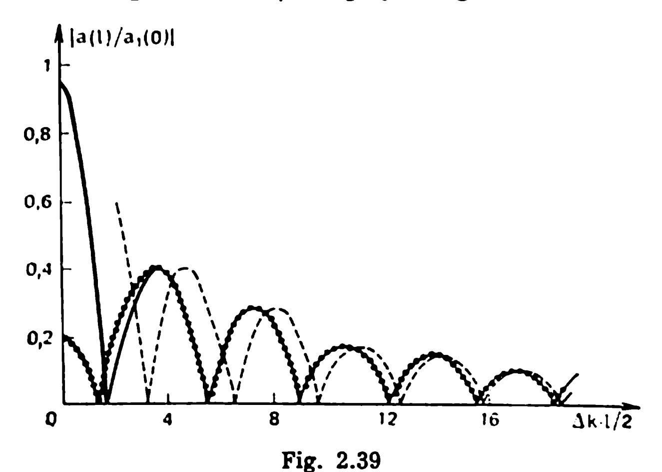


Fig. 2.39

en trait plein), à l'approximation de l'intensité constante (courbe en traits ponctuels) et à l'approximation du champ constant (courbe en traits interrompus). On voit que pour $\Delta kl/2 > 2$ les courbes en trait plein et en points sont pratiquement confondues, alors que la courbe en traits interrompus ne coïncide pas avec elles bien qu'elle se rapproche de ces courbes au fur et à mesure que $\Delta kl/2$ augmente. Ainsi, à la différence de l'approximation du champ constant, l'approximation de l'intensité constante conduit, même pour des désaccords d'onde relativement petits, à des résultats qui sont en bon accord avec les résultats obtenus dans la théorie rigoureuse. Signalons que pour $l < 1/\sqrt{\sigma_1\sigma_2 I_{10}}$ la coïncidence des résultats que nous venons de constater s'observe pratiquement pour toutes les valeurs du désaccord d'onde.

Auto-action de l'onde lumineuse dans un milieu non linéaire quadratique. — Comme il a été dit au § 1.3, l'effet d'auto-action

de l'onde lumineuse est caractéristique d'un milieu *non linéaire cubique*, mais il peut se manifester également dans un milieu *non linéaire quadratique* par suite de la réémission d'une onde dont la fréquence constitue la différence entre la fréquence du deuxième harmonique et celle de l'onde fondamentale. On ne peut pas, dans le cadre de l'approximation du champ constant, de prendre en compte l'auto-action de l'onde lumineuse, ce qui est possible à l'approximation de l'intensité constante.

Passons aux amplitudes et aux phases réelles dans la première équation du système (2.9.3), il vient

$$da_1/dz + ia_1\, d\varphi_1/dz = -i\sigma_1 a_1 a_2 \exp[i(\varphi_2 - 2\varphi_1 - \Delta kz)]. \quad (2.9.16)$$

A l'approximation de l'intensité constante, il convient de poser $da_1/dz = 0$. Alors, on déduit de (2.9.16) que

$$d\varphi_1/dz = -\sigma_1 a_2 \cos(\varphi_2 - 2\varphi_1 - \Delta kz). \quad (2.9.17)$$

En faisant usage des relations (2.9.13) donnant $a_2(z)$ et $\varphi_2(z)$, mettons (2.9.17) sous la forme

$$d\varphi_1/dz = -\sigma_1\sigma_2 I_{10} z \operatorname{sinc}(\Lambda z) \sin(2\varphi_1(0) - 2\varphi_1(z) - \Delta kz/2). \quad (2.9.18)$$

En tenant compte de (2.9.11), la solution de l'équation (2.9.18) peut s'écrire sous la forme

$$\varphi_1(z) = \varphi_1(0) + \frac{\Delta kz}{8 + (\Delta k)^2/\sigma_1\sigma_2 I_{10}} [1 - \operatorname{sinc}(2\Lambda z)]. \quad (2.9.19)$$

Le résultat (2.9.19) reflète la dépendance de la vitesse de phase de l'onde fondamentale vis-à-vis de l'intensité I_{10}. Ceci signifie que l'indice de réfraction du milieu dépend de l'intensité de rayonnement. On est donc en présence d'un effet d'auto-action de l'onde lumineuse dans un milieu non linéaire quadratique.

Longueur non linéaire et longueur de cohérence. — Pour l'analyse qui suit nous utiliserons les notions de longueur non linéaire L et de longueur de cohérence l_{coh}. La *longueur non linéaire* définie par la relation

$$L = (\sigma_1\sigma_2 I_{10})^{-1/2} \quad (2.9.20)$$

est une longueur caractéristique de l'interaction non linéaire des ondes sur laquelle il se produit un transfert efficace de la puissance de l'onde fondamentale au deuxième harmonique. Cette longueur a été introduite au § 2.3 [v. (2.3.25)]. En tenant compte de (2.9.20), récrivons (2.9.11) sous la forme

$$\Lambda = \frac{\Delta k}{2} \sqrt{1 + 8/(\Delta kL)^2}. \quad (2.9.21)$$

La *longueur de cohérence* l_{coh} a été introduite au § 2.4 (v. fig. 2.14). Rappelons que la puissance du rayonnement fondamental est d'abord transférée, sur la longueur de cohérence, au deuxième harmonique

et ensuite, toujours sur la longueur l_{coh}, la puissance est transmise en sens inverse. Il résulte de (2.9.13a) qu'à l'approximation de l'intensité constante la longueur de cohérence a pour valeur

$$l_{coh} = \pi/2\Lambda \tag{2.9.22}$$

ou encore, compte tenu de (2.9.21),

$$l_{coh} = (\pi/\Delta k)\,[1 + 8/(\Delta k L)^2]^{-1/2}. \tag{2.9.23}$$

Selon (2.9.23), la période des battements spatiaux de la fonction $a_2(z)$ dépend de L et donc de l'intensité I_{10}.

On démontre que les résultats des calculs effectués à l'approximation de l'intensité constante coïncident pratiquement avec les résultats obtenus dans la théorie rigoureuse si les longueurs L et l_{coh} satisfont à la condition

$$L/l_{coh} > 2/\pi. \tag{2.9.24}$$

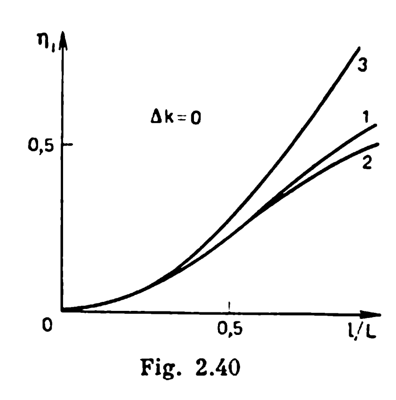


Fig. 2.40

L'inégalité (2.9.24) n'est pas réalisée lorsque les désaccords d'onde sont suffisamment petits. Néanmoins, dans tous les cas l'approximation de l'intensité constante permet d'obtenir des résultats plus corrects que l'approximation du champ constant. Examinons à ce propos le cas où la condition de synchronisme est exactement satisfaite ($\Delta k = 0$).

Efficacité de la conversion en deuxième harmonique dans le cas de la réalisation exacte de la condition de synchronisme. — L'efficacité de la conversion en intensité se définit par

$$\eta_I = I_2(l)/I_1(0) = a_2^2(l)/a_1^2(0). \tag{2.9.25}$$

Dans la théorie rigoureuse, l'efficacité de la conversion se décrit dans ce cas par une relation qui découle immédiatement de (2.4.24):

$$\eta_I = \mathrm{th}^2(\sigma_1 a_1(0)\, l) \approx \mathrm{th}^2(l/L). \tag{2.9.26}$$

En se servant de (2.9.13a), on trouve l'efficacité de la conversion à l'approximation de l'intensité constante:

$$\eta_I = \sigma_2 a_1^2(0)\, l^2 \,\mathrm{sinc}^2(\sqrt{2}\, l/L) \approx \frac{1}{2}\sin^2(\sqrt{2}\, l/L). \tag{2.9.27}$$

On déduit de (2.4.44) qu'à l'approximation du champ constant

$$\eta_I = (l/L)^2. \tag{2.9.28}$$

En posant $l < L$, développons $\text{th}^2\,(l/L)$ et $\frac{1}{2}\sin^2\,(\sqrt{2}\,l/L)$ en séries entières, il vient

$$\text{th}^2\,(l/L) = (l/L)^2\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \ldots\right]; \qquad (2.9.29a)$$

$$\frac{1}{2}\sin^2\left(\sqrt{2}\,\frac{l}{L}\right) = \left(\frac{l}{L}\right)^2\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \ldots\right]. \qquad (2.9.29b)$$

On en conclut que l'efficacité de la conversion à l'approximation de l'intensité constante et l'efficacité calculée en régime non linéaire sont identiques à des termes proportionnels à $(l/L)^6$ près.

La fig. 2.40 représente les courbes de variation de η_l en fonction de l/L obtenues dans la théorie rigoureuse (courbe *1*), à l'approximation de l'intensité constante (courbe *2*) et à l'approximation du champ constant (courbe *3*). On voit que même pour $\Delta k = 0$ l'approximation de l'intensité constante est pratiquement applicable jusqu'à des valeurs de $l/L \approx 1$, alors que l'approximation du champ constant n'assure des résultats corrects que dans la région où $l/L < 0{,}4$.

Bibliographie

1. **Tarassov L.** Bases physiques de l'électronique quantique (domaine optique). — Editions Mir, Moscou, 1979.
2. **Landau L., Lifchitz E.** Electrodynamique des milieux continus. — Editions Mir, Moscou, 1969.
3. **Ландсберг Г. С.** Оптика. — М.: Наука, 1976.
4. **Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.** Теория колебаний. — ГИФМЛ, 1959.
5. **Ахманов С. А., Хохлов Р. В.** Проблемы нелинейной оптики (электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах). — М.: ВИНИТИ, 1965.
6. **Дмитриев В. Г., Ицхоки И. Я.** Оптические умножители частоты. — В кн.: Справочник по лазерам в 2-х т./Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Сов. радио, 1978. — Т. 2.
7. **Мейснер Л. Б., Салтиел С. М.** Нелинейные восприимчивости (экспериментальные данные и методы расчета). — В кн.: Справочник по лазерам в 2-х т./Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Сов. радио, 1978. — Т. 2.
8. **Синг С.** Нелинейные оптические материалы. — В кн.: Справочник по лазерам в 3-х т./Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Сов. радио, 1978.— Т. 2.
9. **Janke E., Emde F., Lösch F.** Tafeln höherer Funktionen. — Stuttgart, Teubner, 1960.
10. **Kleinman D. A.** Theory of second harmonic generation of light. — Phys. Rev., 1962, v. 128, N° 4.
11. **Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.** Теория волн. — М.: Наука, 1979.
12. **Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Чиркин А. С.** Об апертурных ограничениях эффективности оптических удвоителей частоты. — Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1967, т. 10, № 12.
13. **Marcuse D.** Light Transmission Optics, New York, 1972.
14. **Boyd J. D., Kleinman D. A.** Parametric interaction of focused Gaussian light beams. — J. Appl. Phys., 1968, v. 39, N° 8.

15. **Tarassov L.** Physique des processus dans les générateurs de rayonnement optique cohérent. — Editions Mir, Moscou, 1985.
16. **Гончаренко А. М.** Гауссовы пучки света. — Минск: Наука и техника, 1977.
17. **Тагиев З. А.** Приближение заданной интенсивности в теории нелинейных волн в диспергирующих средах: Канд. дис./МГУ. Физфак. — М., 1976.

CHAPITRE 3

QUESTIONS SPÉCIALES DE LA GÉNÉRATION DE DEUXIÈME HARMONIQUE

§ 3.1. Génération de deuxième harmonique dans un milieu linéairement inhomogène

Les cristaux non linéaires réels sont en fait, à un degré important, des milieux *inhomogènes*. L'inhomogénéité du milieu signifie que les indices de réfraction pour l'onde fondamentale et le deuxième harmonique varient d'un point du milieu à l'autre. Cette variation peut être *irrégulière* (milieu statistiquement inhomogène) ou *régulière*. Dans ce dernier cas la variation des indices de réfraction peut se décrire par une fonction analytique des coordonnées spatiales. Dans ce qui suit nous n'étudierons que des variations régulières [1]), en outre, nous nous bornerons à examiner des milieux *linéairement inhomogènes* (quand les inhomogénéités se décrivent par des fonctions linéaires des coordonnées).

Inhomogénéité de la biréfringence de dispersion. — Lors de la génération de deuxième harmonique dans un cristal réel, un rôle important est joué par l'inhomogénéité spatiale (pour l'interaction *ooe*) de la grandeur

$$B(x, y, z, q) = n_2^e(x, y, z, q) - n_{01}(x, y, z, q), \tag{3.1.1}$$

que nous appellerons *biréfringence de dispersion* [2]). Ici, n_{01} et n_2^e sont respectivement les indices de réfraction de l'onde ordinaire fondamentale et de l'onde extraordinaire du deuxième harmonique; q est un paramètre généralisé dont le rôle peut être joué par l'angle θ formé entre l'axe z (la normale à la face d'entrée du cristal) et l'axe optique du cristal, par la température T du cristal, par la longueur d'onde fondamentale λ_1 et par certaines autres grandeurs. La valeur de B détermine le désaccord d'onde

$$\Delta k(x, y, z, q) = 4\pi B(x, y, z, q)/\lambda_1. \tag{3.1.2}$$

Si pour un milieu homogène le désaccord ne dépend que du paramètre q, pour un milieu inhomogène, il est également fonction des coordonnées spatiales. Dans un milieu linéairement inhomogène B est fonction linéaire des coordonnées spatiales.

[1]) Pour la génération d'harmoniques optiques dans des milieux statistiquement inhomogènes, voir par exemple [1].

[2]) Pour la biréfringence ordinaire les fréquences des ondes ordinaire et extraordinaire sont supposées identiques; ici, ces fréquences sont différentes.

Envisageons un faisceau lumineux de front plan et d'amplitude stationnaire modulée spatialement. Nous supposerons que sur l'axe du faisceau (pour $x = y = 0$), à l'entrée du cristal ($z = 0$), la condition de synchronisme est satisfaite:

$$B(0, 0, 0, q_s) = 0. \tag{3.1.3}$$

La valeur q_s du paramètre q pour laquelle la condition de synchronisme est accomplie au point $x = y = z = 0$ est appelé *paramètre de synchronisme* (par exemple, l'angle de synchronisme θ_s, la température de synchronisme T_s, etc.). Il est évident que l'inhomogénéité de la biréfringence de dispersion doit provoquer une diminution de l'efficacité de la génération de deuxième harmonique, car la condition de synchronisme, qui est satisfaite au point $x = y = z = 0$, ne l'est en général pas en d'autres points du faisceau.

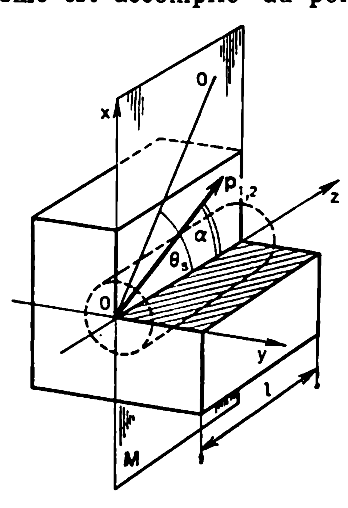


Fig. 3.1

Nous supposerons que les vecteurs $\mathbf{p}_1 = \text{grad}\ n_{o1}$ et $\mathbf{p}_2 = \text{grad}\ n_2^e$ se situent dans le plan passant par l'axe z et l'axe optique OO du cristal (plan M de la fig. 3.1). Ces vecteurs ont la même orientation et font un angle α avec l'axe z. Si $\alpha = 0$ (ou $\alpha = \pi$), l'inhomogénéité est dite *longitudinale*, alors que pour $\alpha = \pi/2$ elle est *transversale*. Comme il est visible sur la figure, l'axe x se situe dans le plan M de sorte que B et Δk sont indépendants de la coordonnée y.

En tenant compte du fait que l'inhomogénéité spatiale du milieu est linéaire et en nous servant de (3.1.3), représentons la fonction $B(x, z, q)$ sous la forme suivante:

$$B(x, z, q) = (q - q_s) \left.\frac{\partial B(0, 0, q)}{\partial q}\right|_{q=q_s} + x \left.\frac{\partial B(x, 0, q_s)}{\partial x}\right|_{x=0} + z \left.\frac{\partial B(0, z, q_s)}{\partial z}\right|_{z=0} = (q - q_s) \left.\frac{\partial B(0, 0, q)}{\partial q}\right|_{q=q_s} + |\text{grad}\, B|\,(x \sin\alpha + z\cos\alpha). \tag{3.1.4}$$

Si $(\partial B/\partial q)_{q_s} = 0$ (cas du synchronisme à 90°), on garde dans (3.1.4) le terme $(q - q_s)^2\ (\partial^2 B/\partial q^2)_{q_s}$.

Dans la pratique, tous les milieux non linéaires sont, dans telle ou telle mesure, inhomogènes. La plus grande inhomogénéité est propre à des cristaux fortement non linéaires tels que le niobate de lithium et le niobate de baryum-sodium obtenus par la méthode de Czochralski [2]. Dans de tels cristaux, l'inho-

mogénéité de la biréfringence apparaît par suite de la modification de la composition (stœchiométrie) du cristal au cours de sa croissance, ce qui peut être dû à l'instabilité des vitesses de rotation et de tirage des bulles cristallіques à partir du bain fondu ainsi qu'à l'hétérogénéité du bain fondu lui-même (par exemple, à cause des variations de température), à l'apparition dans le cristal de contraintes, de fissures, de macles, etc. Les cristaux du groupe de KDP, solubles dans l'eau, sont nettement plus homogènes; pourtant ils peuvent présenter eux aussi des inhomogénéités appréciables (surtout losrque l'ouverture du faisceau augmente). Une inhomogénéité longitudinale considérable et parfois une inhomogénéité transversale de la biréfringence peuvent prendre naissance dans les cristaux lorsque ces derniers sont placés dans des capsules étanches thermostatées à l'intérieur desquelles règne un champ thermique inhomogène.

Amplitude et densité de puissance du deuxième harmonique à l'approximation du champ constant du rayonnement fondamental. — Pour un milieu inhomogène, écrivons, au lieu de (2.2.2), l'expression suivante pour le champ lumineux:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \frac{1}{2}\left\{\mathbf{e}_1 A_1(x, y, z)\exp\left[i\omega t - i\int_0^z k(x, z', q)\,dz'\right] + \right.$$

$$\left. + \mathbf{e}_2 A_2(x, y, z)\exp\left[i2\omega t - i\int_0^z K(x, z', q)\,dz'\right] + \text{c.c.} \qquad (3.1.5)\right.$$

(les intégrales sur z' signifient qu'on considère ici des vecteurs d'onde moyennés sur l'intervalle [0; z]).

En suivant le schéma des raisonnements développés au § 2.2 et en négligeant l'absorption du rayonnement dans le cristal, on peut obtenir dans ce cas un système d'équations raccourcies de la forme suivante [cf. (2.2.22)]:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{2k}\frac{\partial k}{\partial z}A_1 = -i\sigma_1 A_1^* A_2 \exp\left[-i\int_0^z \Delta k(x, z', q)\,dz'\right];$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{2K}\frac{\partial K}{\partial z}A_2 = -i\sigma_2 A_1^2 \exp\left[i\int_0^z \Delta k(x, z', q)\,dz'\right]. \qquad (3.1.6)$$

Les conditions aux limites seront adoptées sous la forme

$$A_1(x, y, 0) = A_{10}(x, y); \quad A_2(x, y, 0) = 0. \qquad (3.1.7)$$

Le système (3.1.6) est obtenu, de même que le système (2.2.22), pour un synchronisme *ooe* scalaire à l'aide de la relation (2.2.8) (c'est-à-dire en négligeant la diffraction et l'effet d'ouverture de diaphragme).

Admettons l'approximation du *champ constant* du rayonnement fondamental. Avec cette approximation, il convient de ne garder

dans (3.1.6) que la seconde équation et d'utiliser $A_{10}(x, y)$ au lieu de $A_1(x, y, z)$. Le problème se ramène donc à la résolution de l'équation suivante:

$$\boxed{\frac{\partial A_2}{\partial z}+\frac{1}{2K}\frac{\partial K}{\partial z}A_2=-i\sigma_2A_{10}^2(x, y)\times \times \exp\left[i\int_0^z \Delta k(x, z', q)\,dz'\right]} \tag{3.1.8}$$

avec la condition aux limites

$$A_2(x, y, 0)=0. \tag{3.1.9}$$

En intégrant (3.1.8) sur z de 0 à l, on obtient compte tenu de (3.1.9)

$$A_2(x, y, l)+\frac{1}{2}\int_0^l \frac{A_2(x, y, z)}{K(x, y, z)}\frac{\partial K}{\partial z}dz=$$

$$=-i\sigma_2A_{10}^2(x, y)\int_0^l \exp\left[i\int_0^z \Delta k(k, z', q)\,dz'\right]dz. \tag{3.1.10}$$

Puis, écrivons

$$\frac{1}{2}\int_0^l \frac{A_2}{K}\frac{\partial K}{\partial z}dz<A_2(l)\int_0^l \frac{\partial K}{\partial z}\frac{dz}{K}=A_2(l)\ln\frac{K(x, l, q)}{K(x, 0, q)}\ll$$

$$\ll A_2(x, y, l).$$

Ceci signifie que le second terme du premier membre de (3.1.10) peut être négligé. On peut donc écrire l'expression suivante pour l'amplitude du deuxième harmonique à la sortie du cristal au point (x, y):

$$A_2(x, y, l)=-i\sigma_2A_{10}^2(x, y)\int_0^l \exp\left[i\int_0^z \Delta k(k, z', q)\,dz'\right]dz. \tag{3.1.11}$$

En faisant usage de (3.1.2) et (3.1.4), représentons l'intégrale $I=\int_0^z \Delta k(x, z', q)\,dz'$ sous la forme

$$I=\Delta k_q z+(4\pi/\lambda_1)\nabla B(xz\sin\alpha+z^2\cos\alpha/2), \tag{3.1.12}$$

où

$$\Delta k_q=\frac{4\pi}{\gamma_1}(q-q_s)\left.\frac{\partial B(0, 0, q)}{\partial q}\right|_{q=q_s}; \quad \nabla B=|\operatorname{grad} B|.$$

En introduisant (3.1.12) dans (3.1.11) et en utilisant la relation $S_2 = (cn_2^e/8\pi) A_2 A_2^*$, on obtient l'expression suivante pour la densité de puissance du deuxième harmonique à la sortie du cristal au point (x, y):

$$S_2(x, y, l, q) = \frac{cn_2^e}{8\pi} \sigma_2^2 l^2 A_{10}^4(x, y) \int_0^1 \int_0^1 \exp\Big\{ i\Delta k_q l(\xi - \xi') + \\ + i\frac{4\pi}{\lambda_1} \nabla B \Big[xl(\xi - \xi') \sin\alpha + \frac{1}{2} l^2 (\xi^2 - \xi'^2) \cos\alpha \Big\} d\xi\, d\xi' \\ (\text{ici } \xi = z/l;\quad \xi' = z'/l). \quad (3.1.13)$$

Dans le cas d'un milieu homogène le désaccord dépend uniquement de q si bien que l'expression (3.1.11) prend la forme

$$A_2(x, y, l) = -i\sigma_2 A_{10}^2(x, y) \int_0^l \exp(i\Delta k_q z)\, dz \quad (3.1.14)$$

ou encore

$$A_2(x, y, l) = -i\sigma_2 A_{10}^2(x, y)\, l \operatorname{sinc}(\Delta k_q l/2) \exp(i\Delta k_q l/2).$$

Il s'ensuit que

$$S_2(x, y, l) = \frac{8\pi n_2^e}{cn_{01}^2} \sigma_2^2 l^2 S_1^2(x, y, 0) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta k_q l}{2}\right) \quad (3.1.15)$$

[comparer le résultat obtenu avec (2.4.47)].

Faisceau d'amplitude spatialement modulée par la fonction de Gauss. — Bornons-nous à examiner les faisceaux de rayonnement fondamental ayant un front d'onde plan et une amplitude modulée par la *fonction de Gauss*:

$$A_{10}(x, y) = A_0 \exp[-(x^2 + y^2)/\rho_0^2]. \quad (3.1.16)$$

Utilisons uniquement l'approximation du champ constant du rayonnement fondamental [1]).

Introduisons (3.1.16) dans (3.1.13) et passons de la densité de puissance $S_2(x, y, l, q)$ à la puissance $P_2(l, q)$, il vient

$$P_2(l, q) = \int_{-\infty}^{\infty}\int S_2(x, y, l, q)\, dx\, dy = \frac{cn_2^e \sqrt{\pi}\, \rho_0 \sigma_2^2 l^2 A_0^4}{16\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^1 \int_0^1 d\xi\, d\xi' \exp\Big\{ -4\frac{x^2}{\rho_0^2} + \\ + 2i \Big[\varphi(\xi) - \varphi(\xi') + 2\mu_1 \frac{x}{\rho_0} (\xi - \xi') \Big] \Big\}. \quad (3.1.17)$$

[1]) L'influence de l'inhomogénéité du milieu sur la génération de deuxième harmonique est examinée dans [3] au régime non linéaire et dans [4] à l'approximation de l'intensité constante.

Ici, les notations employées sont les suivantes:

$$\varphi(\xi)=\Delta k_q l\xi/2+\pi\mu_2\xi^2/4\,; \qquad (3.1.18)$$

$$\mu_1=\pi l\rho_0\nabla B\sin\alpha/\lambda_1\,; \qquad (3.1.19)$$

$$\mu_2=4\nabla Bl^2\cos\alpha/\lambda_1. \qquad (3.1.20)$$

En faisant usage de la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-p^2x^2\pm qx)\,dx=\exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{|p|} \qquad (3.1.21)$$

et en posant $p = 2/\rho_0$, $q = 4i\mu_1(\xi - \xi')/\rho_0$, mettons (3.1.17) sous la forme:

$$P_2(l,\ q)=(cn_2^e\rho_0^2\sigma_2^2l^2A_0^4/32)\int_0^1\int_0^1\exp\{2i[\varphi(\xi)-\varphi(\xi')]-$$
$$-\mu_1^2(\xi-\xi')^2\}\,d\xi\,d\xi'. \qquad (3.1.22)$$

Puis, notons que

$$\int_0^1\int_0^1\sin\{2[\varphi(\xi)-\varphi(\xi')]\}\exp[-\mu_1^2(\xi-\xi')^2]\,d\xi\,d\xi'=0. \qquad (3.1.23)$$

Le résultat (3.1.23) provient du fait que l'expression à intégrer change de signe, comme il est facile de le voir, si l'on permute ξ et ξ'. En tenant compte de (3.1.23) et en se servant de la relation $\exp i\Phi =$ $= \cos\Phi + i\sin\Phi$, on obtient l'expression suivante pour la puissance du deuxième harmonique dans le cas considéré:

$$P_2(l,\ q)=(8n_2^e\sigma_2^2l^2/cn_{01}^2\rho_0^2)\,P_{10}^2\int_0^1\int_0^1\cos\{2[\varphi(\xi)-\varphi(\xi')]\}\times$$
$$\times\exp[-\mu_1^2(\xi-\xi')^2]\,d\xi\,d\xi', \qquad (3.1.24)$$

où [cf. (2.9.16)]

$$P_{10}=\frac{cn_{01}}{8\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}A_{10}^2(x,\ y)\,dx\,dy=\frac{cn_{01}\rho_0^2A_0^2}{16}. \qquad (3.1.25)$$

Milieu transversalement inhomogène. — Supposons que $\alpha = \pi/2$ et donc

$$\mu_1=\pi l\rho_0\nabla B/\lambda_1\,;\quad \mu_2=0. \qquad (3.1.26)$$

Dans ce cas l'expression (3.1.24) donne

$$P_2 = \frac{8n_2^e\sigma_2^2 l^2 P_{10}^2}{cn_{01}^2\rho_0^2} \int_0^1 \int_0^1 \cos\,[2\Omega\,(\xi-\xi')]\,e^{-\mu_1^2(\xi-\xi')^2}\,d\xi\,d\xi', \quad (3.1.27)$$

où $\Omega = \Delta k_q l/2$. Le résultat (3.1.27) peut être mis sous une forme plus commode pour les calculs:

$$P_2 = \frac{8n_2^e\sigma_2^2 l^2 P_{10}^2}{\sqrt{\pi}\,cn_{01}^2\rho_0^2\,\mu_1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{X^2}{\mu_1^2}\right)\operatorname{sinc}^2(\Omega+X)\,dX, \quad (3.1.28)$$

où $X = 2x\mu_1/\rho_0$. A cet effet, il faut poser $\mu_2 = 0$ dans (3.1.17) et intégrer sur ξ et ξ':

$$\int_0^1 \int_0^1 \exp\,[i2\,(\Omega+X)\,(\xi-\xi')]\,d\xi\,d\xi' = \operatorname{sinc}^2(\Omega+X).$$

Dans le cas d'un milieu *fortement inhomogène* ($\mu_1 \gg 1$) l'intégrale figurant dans (3.1.28) peut être exprimée par des fonctions élémentaires. Pour $\mu_1 \gg 1$, la fonction $\exp\,(-X^2/\mu_1^2)$ peut être considérée comme une fonction lentement variable de X. Par rapport à elle, la fonction $\operatorname{sinc}^2(\Omega + X)$ varie rapidement; elle décroît vite (en tendant vers zéro) de part et d'autre du point $X = -\Omega$. De ce fait, on peut dans le cas considéré poser dans (3.1.28) de façon approchée

$$\exp\,(-X^2/\mu_1^2) \cong \exp\,(-\Omega^2/\mu_1^2). \quad (3.1.29)$$

Ainsi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\,(-X^2/\mu_1^2)\operatorname{sinc}^2(\Omega+X)\,dX \cong$$

$$\cong e^{-\Omega^2/\mu_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(\Omega+X)\,dX = \pi e^{-\Omega^2/\mu_1^2}. \quad (3.1.30)$$

Compte tenu de (3.1.30), l'expression (3.1.28) prend la forme

$$P_2 = (8n_2^e\sqrt{\pi}\,\sigma_2^2 l^2/cn_{01}^2\rho_0^2\mu_1)\,P_{10}^2\exp\,(-\Omega^2/\mu_1^2). \quad (3.1.31)$$

Il résulte de (3.1.31) que la courbe de synchronisme $P_2\,(q)$ possède une forme gaussienne; la largeur de la courbe de synchronisme au niveau de demi-puissance a pour valeur

$$(\Delta k)_{1/2} = \sqrt{\ln 2}\,\pi\rho_0\nabla B/\lambda_1. \quad (3.1.32)$$

Pour $\mu_1 \leqslant 1$, une évaluation approchée de l'intégrale figurant dans (3.1.28) peut être obtenue si l'on représente la fonction $\operatorname{sinc}^2(\Omega + X)$ par l'intermédiaire de la fonction de Bessel [$\operatorname{sinc}^2\Phi = \pi J_{1/2}^2(\Phi)/\Phi$], et le résultat de l'intégration, par l'intermédiaire de la fonction gamma et la série hypergéométrique généralisée

(v. [5]). L'expression approchée de P_2 est dans ce cas de la forme

$$P_2(l\,;\ \mu_1 \neq 0) \cong P_2(l\,;\ \mu_1=0)\,[1-(\mu_1^2/6)+(\mu_1^4/30)]. \qquad (3.1.33)$$

Il s'ensuit de (3.1.33) que pour $\mu_1 \approx 1$, la puissance du deuxième harmonique diminue d'environ 15 % par suite de l'inhomogénéité du milieu.

La fig. 3.2 représente les courbes de synchronisme (variation de P_2 en fonction de $\Omega = \Delta k_q l/2$) calculées à l'aide de (3.1.28) sur ordinateur pour différentes valeurs de μ_1. En examinant cette figure, on

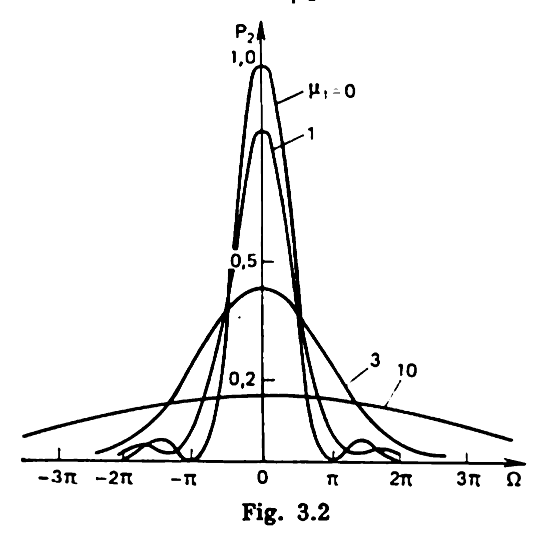


Fig. 3.2

voit que lorsque μ_1 augmente, les maximums latéraux caractéristiques d'un milieu homogène disparaissent, la courbe de synchronisme s'élargit et prend, pour $\mu_1 \gg 1$, une forme gaussienne; l'efficacité de la génération de deuxième harmonique diminue rapidement lorsque μ_1 augmente. Ainsi, en relevant une courbe de synchronisme expérimentale, on peut juger, tout au moins qualitativement, du caractère et de la valeur de l'inhomogénéité de la biréfringence.

En introduisant (3.1.16) dans (3.1.13) et en posant $\mu_2 = 0$, on obtient l'expression suivante pour la densité de puissance du deuxième harmonique sur la face de sortie du cristal:

$$S_2(x, y, l, q) = \frac{cn_2^e}{8\pi}\sigma_2^2 l^2 A_0^4 e^{-4\frac{x^2+y^2}{\rho_0^2}} \times$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 \exp\left[i2\left(\Omega+2\frac{\mu_1 x}{\rho_0}\right)(\xi-\xi')\right] d\xi\, d\xi' =$$

$$= \frac{cn_2^e}{\pi 8}\sigma_2^2 l^2 A_0^4 e^{-4\frac{x^2+y^2}{\rho_0^2}} \operatorname{sinc}^2\left(\Omega+2\frac{\mu_1 x}{\rho_0}\right). \qquad (3.1.34)$$

L'expression (3.1.34) montre que la répartition de la densité de puissance du deuxième harmonique suivant l'axe x a le caractère de franges d'interférences qui se superposent à la distribution gaussienne. Pour $q = q_s$ on a $\Omega = 0$, et le maximum central (principal) de la figure d'interférence correspond à l'axe du faisceau. Pour $q \neq q_s$, le maximum principal se déplace au point $x = -\Omega\rho_0/2\mu_1$. En examinant la figure d'interférences, on peut déterminer ∇B. Supposons que sur une longueur d suivant l'axe x sur la face terminale du cristal on observe N franges d'interférences, y compris le maximum principal. On peut alors déterminer ∇B à partir de la relation (pour $q = q_s$)

$$\frac{d}{\pi\rho_0/2\mu_1} = N + 1. \tag{3.1.35}$$

Ainsi,

$$\nabla B = \lambda_1 (N+1)/2ld. \tag{3.1.36}$$

Milieu longitudinalement inhomogène. — Supposons que $\alpha = 0$ et donc

$$\mu_1 = 0; \quad \mu_2 = 4\nabla B l^2/\lambda_1. \qquad (3.1.37)\ ^{1)}$$

Dans ce cas l'expression (3.1.24) prend la forme

$$P_2(l, q) = \frac{8n_2^e \sigma_2^2 l^2 P_{10}^2}{c n_{01}^2 \rho_0^2} \times$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 \exp\left[i2(\xi - \xi')\Omega + i\frac{\pi\mu_2}{2}(\xi^2 - \xi'^2)\right] d\xi\, d\xi'. \tag{3.1.38}$$

Les intégrales de la forme (3.1.38) se rencontrent souvent dans la théorie de la diffraction de la lumière, elles peuvent être exprimées par l'intermédiaire des intégrales des erreurs ou des intégrales de Fresnel [5]. Introduisons de nouvelles variables d'intégration

$$\tau = 2\Omega\xi + \frac{\pi}{2}\mu_2\xi^2; \quad \tau' = 2\Omega\xi' + \frac{\pi}{2}\mu_2\xi'^2 \tag{3.1.39}$$

et des désignations

$$\gamma_1 = \frac{2\Omega^2}{\pi\mu_2}; \quad \gamma_2 = 2\frac{(\Omega + \pi\mu_2/2)^2}{\pi\mu_2}. \tag{3.1.40}$$

L'intégrale double figurant dans (3.1.38) est le produit de deux intégrales complexes conjuguées: II^*. On peut s'assurer que

$$I = [\Phi(e^{-i\pi/4}\sqrt{\gamma_2}) - \Phi(e^{-i\pi/4}\sqrt{\gamma_1})]/\sqrt{2\mu_2}, \tag{3.1.41}$$

---

1) En toute rigueur, dans le cas de l'inhomogénéité longitudinale du milieu on suppose réalisée l'inégalité $\mu_1 \ll \mu_2$ qui peut avoir lieu, lorsque $\rho_0 \ll l$, également pour $\alpha \neq 0$.

avec

$$\Phi(u)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-t^2}\,dt \tag{3.1.42}$$

l'intégrale des erreurs. Utilisons la relation

$$\Phi(e^{-i\pi/4}\sqrt{\gamma})\,e^{i\pi/4}/\sqrt{2}=C(\gamma)+iS(\gamma), \tag{3.1.43}$$

où

$$C(\gamma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{\gamma}}\cos t^2\,dt\,; \qquad S(\gamma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{\gamma}}\sin t^2\,dt \tag{3.1.44}$$

sont les intégrales de Fresnel. En faisant usage de (3.1.43), mettons (3.1.41) sous la forme

$$I=e^{-i\pi/4}\{[C(\gamma_2)-C(\gamma_1)]+i[S(\gamma_2)-S(\gamma_1)]\}/\sqrt{\mu_2}. \tag{3.1.45}$$

On en déduit que

$$II^*=\{[C(\gamma_2)-C(\gamma_1)]^2+[S(\gamma_2)-S(\gamma_1)]^2\}/\mu_2$$

et par conséquent

$$P_2=\frac{8n_2^e\sigma_2^2 l^2 P_{10}^2}{c n_{01}^2\rho_0^2\mu_2}\{[C(\gamma_2)-C(\gamma_1)]^2+[S(\gamma_2)-S(\gamma_1)]^2\}. \tag{3.1.46}$$

La fig. 3.3 représente les courbes de synchronisme calculées sur ordinateur pour différentes valeurs de μ_2 à l'aide de la relation

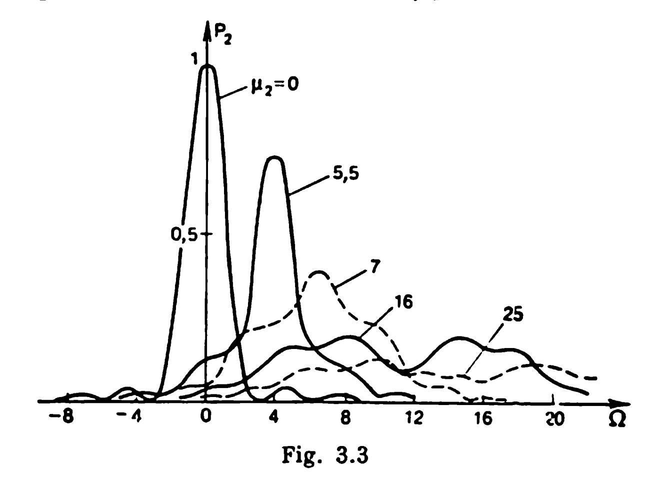


Fig. 3.3

(3.1.46). De l'aspect de ces courbes on peut déduire que, premièrement, à mesure que μ_2 augmente, la courbe de synchronisme s'élargit

notablement et peut avoir plusieurs maximums. Deuxièmement, pour $\mu_2 \neq 0$, le maximum de puissance de sortie se déplace dans la région de $\Omega > 0$. Il s'ensuit que pour obtenir le coefficient de conversion le plus élevé il faut assurer un désaccord d'onde convenable au centre du faisceau, à l'entrée du cristal (par exemple, pour $\mu_2 = 5{,}5$ un désaccord d'onde optimal correspond à la valeur $\Omega_{\text{opt}} = 3{,}5$). Pour $\Omega = 0$, la puissance du deuxième harmonique à la sortie du cristal décroît vite lorsque μ_2 augmente.

La figure observée est analogue à celle qu'on obtient lors de la diffraction de la lumière par une ouverture ronde. Rappelons à ce propos qu'au centre de cette figure d'interférence il se forme une tache sombre (tache de Poisson). Dans ce cas, on peut examiner, par analogie avec les zones de Fresnel, des zones dites de cohérence, situées sur la longueur du cristal. Ces dernières génèrent des ondes du deuxième harmonique de phases différentes (les ondes produites par des zones voisines sont en opposition de phase). La longueur de la m-ième zone de cohérence diminue lorsque m et μ_2 augmentent. Pour de faibles valeurs de μ_2 cette longueur devient supérieure à la longueur l du cristal, l'efficacité de la génération de deuxième harmonique est alors maximale. Lorsque μ_2 augmente, les zones de cohérence se rétrécissent et l'intensité du deuxième harmonique à la sortie du cristal diminue en passant par une série de maximums et de minimums. L'apparition de ces extrémums est liée à l'interférence des ondes du deuxième harmonique produites par les différentes zones de cohérence.

En utilisant (3.1.46) et en tenant compte de (3.1.25) et (3.1.16) on peut obtenir l'expression suivante pour la densité de puissance du deuxième harmonique à la sortie du cristal:

$$S_2(x, y, l, q) = \frac{c n_2^c \sigma_2^2 l^2 A_0^4}{8\pi\mu_2} e^{-4\frac{x^2+y^2}{\rho_0^2}} \times$$
$$\times \{[C(\gamma) - C(\gamma_1)]^2 + [S(\gamma_2) - S(\gamma_1)]^2\}. \quad (3.1.47)$$

Dans le cas considéré, la répartition de la densité de puissance du deuxième harmonique dans la section transversale reste gaussienne et se caractérise par l'absence de franges d'interférence qui s'observent dans un milieu transversalement inhomogène.

Sur la nécessité de tenir compte de l'inhomogénéité de la biréfringence. — L'examen des courbes des fig. 3.2 et 3.3 et des dépendances de P_2 vis-à-vis de μ_1 et μ_2 permet de déterminer les régions de valeurs des paramètres μ_1 et μ_2, dans lesquelles on peut pratiquement négliger l'influence que l'inhomogénéité de la biréfringence de dispersion a sur l'efficacité de la génération de deuxième harmonique. Ces régions satisfont aux inégalités

$$\mu_1 \leqslant 0{,}5; \quad \mu_2 \leqslant 1. \quad (3.1.48)$$

Ce faisant, on ne devra pas oublier que les expressions de μ_1 et μ_2 font intervenir non seulement le gradient de biréfringence mais également la longueur du cristal non linéaire et le rayon du cross-over du faisceau lumineux. De ce fait, l'influence de l'inhomogénéité

du milieu sur le processus de génération de deuxième harmonique peut être considérable, même pour de faibles valeurs de ∇B, si la longueur du cristal utilisé et l'ouverture du faisceau lumineux sont suffisamment grandes.

Pour les cristaux du type de niobate de lithium de qualité moyenne, on peut adopter $\nabla B = 10^{-3}$ à 10^{-4} cm^{-1} (notons qu'ici $\nabla B \approx \Delta n_2^c$, $\nabla n_{01} \approx 0$), ce qui donne $\mu_1 = 10$ à 1 pour $\rho_0 = 0{,}1$ cm, $l = 3$ cm, $\lambda_1 = 10^{-4}$ cm. Une inhomogénéité transversale si considérable doit être obligatoirement prise en compte lors du calcul de l'efficacité de la génération de deuxième harmonique. Pour des valeurs indiquées ci-dessus de ρ_0, l, λ_1, l'inhomogénéité transversale peut être négligée lorsque $\nabla B < 5 \cdot 10^{-5}$ cm^{-1}.

Dans les cristaux de niobate de lithium le gradient longitudinal de biréfringence de dispersion est plusieurs fois plus petit que le gradient transversal. De la condition $\mu_2 \leqslant 1$ il s'ensuit que pour $l = 3$ cm et $\lambda_1 = 10^{-4}$ cm l'inhomogénéité longitudinale peut être négligée si $\nabla B \lesssim 10^{-6}$ cm^{-1}, c'est-à-dire dans le cas des cristaux suffisamment homogènes.

Signalons que ∇B dépend essentiellement de la stœchiométrie du cristal et peut être notablement diminué par un choix approprié du coefficient de stœchiométrie R (rapport en poids du lithium et du niobium dans le bain fondu). En même temps, on ne devra pas oublier que les paramètres de synchronisme q_s dépendent fortement de R. Ainsi, lorsque R (dans le niobate de lithium) varie de 0,97 à 1,2, la température de synchronisme à 90° pour $\lambda_1 = 10^{-4}$ cm varie de 0 à 170° C [2].

Comme il est indiqué précédemment, l'influence de l'inhomogénéité longitudinale du cristal sur l'efficacité de la génération de deuxième harmonique peut être partiellement compensée par un choix convenable de la valeur du paramètre Ω, c'est-à-dire du produit $\Delta k_0 l$. Le problème de détermination du désaccord d'onde initial (à l'entrée du cristal) a été résolu par des méthodes numériques [3]. Quant au choix de la longueur optimale du cristal, ce problème est examiné [6].

Remarques sur le rôle positif de l'inhomogénéité de la biréfringence. — L'inhomogénéité de la biréfringence doit être considérée évidemment comme un facteur négatif, car elle provoque une baisse considérable de la puissance de sortie du deuxième harmonique (v. fig. 3.2 et 3.3). Pourtant l'inhomogénéité de la biréfringence peut également jouer un rôle positif.

Le fait est que dans les cristaux homogènes la courbe de synchronisme peut présenter une forme très « pointue » suivant un des paramètres (par exemple, suivant la température), ce qui exige d'assurer une stabilisation serrée de ce paramètre. En pratique, il s'avère souvent plus avantageux d'utiliser dans de tels cas des cristaux plus ou moins inhomogènes. Un cristal inhomogène se caractérise non seulement par une diminution de la puissance de sortie du deuxième harmonique mais aussi par un élargissement de la courbe de synchronisme qui rend superflue une stabilisation stricte du paramètre. En outre, il en résulte une fiabilité accrue de l'équipement et une diminution des dimensions et du poids.

§ 3.2. Génération de deuxième harmonique en tenant compte des auto-actions thermiques

Au cours de la génération de deuxième harmonique dans un cristal non linéaire il se produit une certaine absorption de l'énergie du rayonnement fondamental et du deuxième harmonique. Jusqu'ici nous en avons tenu compte en introduisant dans les équations tronquées des termes proportionnels aux coefficients d'absorption linéaire

δ_1 et δ_2. Dans beaucoup de cas on a négligé ces coefficients puisque pour des valeurs de $\delta \approx 10^{-2}$ à 10^{-3} cm^{-1}, caractéristiques des cristaux transparents, on peut poser $\exp(-\delta l) \approx 1$.

Mais on doit avoir en vue que l'absorption d'énergie s'accompagne d'un échauffement du cristal. Cet échauffement devient important pour des valeurs moyennes relativement élevées (supérieures à 1 W) de la puissance de rayonnement mises en œuvre dans les lasers *pulsés* à action périodique (fréquence de répétition des impulsions $f \approx 10$ à 10^3 Hz), dans les lasers *quasi continus* ($f \approx 10$ à 10^3 kHz) et dans les lasers *continus*. En règle générale l'échauffement du cristal par l'énergie absorbée est spatialement *inhomogène*, ce qui rend difficile et parfois même impossible de compenser les effets thermiques. Il est donc nécessaire d'examiner plus en détail l'influence des effets thermiques sur le processus de génération de deuxième harmonique.

Au régime thermique stationnaire, le faisceau lumineux se propage dans un milieu faiblement absorbant *de façon auto-adaptée*. Ceci signifie que les caractéristiques du milieu sont déterminées dans une certaine mesure par le faisceau lui-même. On peut donc parler de l'auto-action du faisceau sur lui-même. A ce propos on utilise le terme « auto-actions thermiques ».

Désaccord thermique non linéaire et réfraction non linéaire. — Les auto-actions thermiques ont pour origine un champ thermique inhomogène qui se crée dans le cristal par suite de l'absorption du rayonnement. Un échauffement non uniforme du cristal provoque à son tour une variation des indices de réfraction des ondes de fréquence fondamentale et du deuxième harmonique. L'accroissement total Δn de chacun des indices de réfraction est la somme de deux termes (v., par exemple, § 2.13 dans [7]) :

$$\Delta n = \Delta n_t + \Delta n', \tag{3.2.1}$$

où Δn_t est l'accroissement lié à un échauffement uniforme libre du cristal, et $\Delta n'$, l'accroissement dû à des contraintes thermoélastiques qui apparaissent par suite de l'échauffement non uniforme.

La répartition non uniforme dans l'espace des valeurs des indices de réfraction est à l'origine de deux effets non linéaires annexes qui influent sur l'efficacité de la génération de deuxième harmonique [1]). Premièrement, il se crée une biréfringence de dispersion B non uniforme dans l'espace et, par voie de conséquence, un *désaccord non uniforme suivant la section du faisceau*, ce qui limite de façon notable l'efficacité de la conversion. Deuxièmement, il se produit une *réfraction non linéaire*. Autrement dit, une lentille thermique se forme dans le cristal qui provoque soit une autofocalisation, soit une défocalisation du rayonnement.

---

[1]) Nous n'examinons pas ici des effets tels que la destruction du cristal sous l'action de fortes contraintes thermo-élastiques, le claquage optique et autres.

Le premier de ces effets (apparition d'un désaccord thermique non linéaire) se manifeste nettement plus tôt que le second. Pour l'étude des auto-excitations thermiques [8], [9] on introduit le rayon d'autofocalisation thermique R_{nl}, que l'on peut interpréter comme distance focale de la lentille thermique. Si $R_{nl} \gg l$, la réfraction non linéaire ne se manifeste pas sur la longueur l du cristal, mais on doit néanmoins tenir compte de l'apparition d'un désaccord thermique non linéaire.

Ces effets ont en fait une origine commune. L'apparition d'un champ thermique inhomogène entraîne (compte tenu de la contribution des contraintes thermo-élastiques) une incurvation du front de l'onde lumineuse. Si le profil d'amplitude de l'onde n'arrive pas à subir, sur la longueur du cristal, de variations appréciables (qui suivent inévitablement l'incurvation du front), il ne se produit qu'un désaccord thermique. Dans ces conditions, le point focal pour le front courbé se situe loin à l'extérieur du cristal ($R_{nl} \gg l$), si bien que la réfraction non linéaire peut être négligée. On dit dans le cas considéré que l'on a une autofocalisation *extérieure*. Si $R_{nl} \leqslant l$, le point focal se situe à l'intérieur du cristal (autofocalisation *intérieure*), le profil d'amplitude a le temps de varier notablement sur la longueur du cristal, de sorte que l'on doit tenir compte tant du désaccord thermique que de la réfraction non linéaire.

Dans ce qui suit nous limiterons les descriptions à celles de l'autofocalisation extérieure et négligerons donc la réfraction non linéaire.

Hypothèses simplificatrices principales. — Nous allons considérer un problème à *symétrie axiale*. Supposons que le cristal non linéaire se présente sous forme d'un cylindre de longueur l et le rayon r_0 (tels que $r_0 \ll l$) et que la moyenne dans le temps de la densité de puissance du rayonnement fondamental à l'entrée du cristal est de la forme

$$S_1(r, 0) = S_{10} \exp(-2r^2/\rho_0^2). \tag{3.2.2}$$

Pour un régime pulsé périodique ou quasi continu la moyenne de la densité de puissance $S_1(r, z)$ s'exprime par l'intermédiaire de la densité de puissance instantanée $S_1(r, z, t)$ comme suit

$$S_1(r, z) = f \int_{-\infty}^{\infty} S_1(r, z, t)\, dt, \tag{3.2.3}$$

où f est la fréquence de répétition des impulsions.

Le régime thermique du cristal sera supposé *stationnaire* (on se servira de l'équation de la chaleur stationnaire). Dans le cas des lasers continus cette condition n'élève aucune objection. Quant aux lasers pulsés à fonctionnement périodique, il suffit d'imposer l'inégalité

$$f \gg 1/\tau_t \tag{3.2.4}$$

où τ_t est le temps caractéristique d'établissement du régime thermique. C'est ainsi que pour $\rho_0 = 0,1$ cm on peut poser $\tau_t \approx 1$ s; dans ce cas le régime thermique peut être supposé stationnaire pour $f > 10$ Hz.

Nous supposerons également que l'échange de chaleur entre le cristal et le milieu environnant (le thermostat) ne s'effectue que par la surface latérale. Pour $r_0 \ll l$ on peut évidemment négliger les effets thermiques de bord dans les sections $z = 0$ et $z = l$. Enfin, la diffraction sera négligée de même que les effets d'ouverture (de diaphragme et d'angle).

Désaccord thermique; puissance critique d'autofocalisation. — La température $T(r, z)$ à un point (r, z) du cristal est représentée sous la forme

$$T(r, z) = T(r_0, z) + \Delta T(r, z), \tag{3.2.5}$$

où $T(r_0, z)$ est la température de la surface latérale du cristal; $\Delta T(r, z)$, la « contribution » spatialement inhomogène due à l'absorption du rayonnement dans le cristal ($\Delta T(r_0, z) = 0$). La fonction $T(r, z)$ pour une certaine valeur fixée de z est montrée par la fig. 3.4 sur laquelle T_0 est la température du thermostat et T_s, la température de synchronisme (pour un cristal donné et des valeurs données de λ_1 et θ_s). Grâce aux sources internes de dégagement de chaleur la température à l'intérieur du cristal est d'autant plus élevée que r est plus petit. On remarquera qu'au passage par la surface latérale du cristal la température subit une variation en forme de saut. Il en résulte un flux de chaleur dans le sens du cristal vers le thermostat. En l'absence d'un tel flux (pour $T(r_0, z) \equiv T_0$), on dit qu'il y a *contact thermique idéal* à la surface limite entre le cristal et le thermostat.

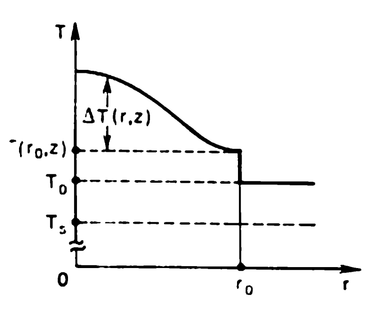


Fig. 3.4

Le désaccord d'onde $\Delta k(r, z)$ dû à la différence entre $T(r, z)$ et T_s peut être représenté sous la forme [rappelons la relation (3.1.2)] :

$$\Delta k(r, z) = 4\pi (\partial B/\partial T)_{T=T_s} [T(r, z) - T_s]/\lambda_1. \tag{3.2.6}$$

En tenant compte de (3.2.5), récrivons cette égalité sous la forme

$$\Delta k(r, z) = \Delta k_0(z) + \Delta k_{at}(r, z), \tag{3.2.7}$$

où

$$\Delta k_0(z) = 4\pi (\partial B/\partial T)_{T=T_s} [T(r_0, z) - T_s]/\lambda_1 \tag{3.2.8}$$

est le désaccord lié à la différence entre la température de la surface latérale du cristal (dans la section z) et la température de synchro-

nisme et

$$\Delta k_{at}(r, z) = 4\pi (\partial B/\partial T)_{T=T_s} \Delta T(r, z)/\lambda_1 \qquad (3.2.9)$$

est un désaccord additionnel dû aux auto-actions thermiques (au champ thermique inhomogène); nous l'appellerons *désaccord thermique.*

En faisant usage de (3.2.9), cherchons la demi-largeur δT de la courbe de température de synchronisme. La fonction

$$S_2(l) \sim \sin^2(\Delta k_{at} l/2)/(\Delta k_{at} l/2)^2$$

est égale à la moitié de sa valeur maximale pour $\Delta k_{at} = \pi/l$. En portant dans cette égalité le résultat (3.2.9), on trouve la demi-largeur cherchée

$$\delta T = \lambda_1/[4l(\partial B/\partial T)_{T=T_s}]. \qquad (3.2.10)$$

Introduisons la *puissance critique d'autofocalisation* en la définissant par la relation

$$P_{cr} = \varkappa \lambda_1/(\partial B/\partial T)_{T=T_s}, \qquad (3.2.11)$$

où $\varkappa$ est le *coefficient de conductibilité thermique.* Si la puissance d'entrée moyenne du rayonnement d'onde fondamentale est supérieure à P_{cr}, le front de phase de l'onde subit une distorsion considérable par suite des auto-actions thermiques.

En utilisant (3.2.11), récrivons (3.2.10) sous la forme

$$\delta T = P_{cr}/4\varkappa l. \qquad (3.2.12)$$

Pour $P_{cr} = 10^{-2}$ W, $\varkappa = 1{,}3\cdot 10^{-2}$ W/(cm·K), $l = 4$ cm, on obtient $\delta T \approx 0{,}2$ K. Les évaluations données ci-dessus sont caractéristiques du cristal d'ADP.

En tenant compte de (3.2.11), on peut mettre les relations (3.2.8) et (3.2.9) sous la forme suivante:

$$\Delta k_0(z) = 4\pi\varkappa [T(r_0, z) - T_s]/P_{cr}; \qquad (3.2.8a)$$

$$\Delta k_{at}(r, z) = 4\pi\varkappa \Delta T(r, z)/P_{cr}. \qquad (3.2.9a)$$

Equation de la chaleur. — En négligeant la contribution due aux contraintes thermo-élastiques, écrivons l'équation de la chaleur sous la forme

$$\varkappa \nabla_r^2 \Delta T(r, z) + 2\sum_{i=1}^{2} \delta_i S_i(r, z) = 0, \qquad (3.2.13)^{1)}$$

où $\nabla_r^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$. C'est l'*équation de la chaleur stationnaire* valable pour un corps à symétrie axiale comportant des sources in-

[1]) Les flux de chaleur longitudinaux (le long de l'axe des z) étant petits par rapport aux flux transversaux, on peut les négliger.

ternes de dégagement de chaleur [10]. Ces sources se décrivent par les termes $2\delta_i S_i(r, z)$, où $S_1(r, z)$ et $S_2(r, z)$ sont les moyennes dans le temps des densités de puissance du rayonnement fondamental et du deuxième harmonique.

En utilisant (3.2.9a), mettons l'équation (3.2.13) sous la forme

$$-\nabla_r^2 \Delta k_{at}(r, z) = \frac{8\pi}{P_{cr}} \sum_{i=1}^{2} \delta_i S_i(r, z). \qquad (3.2.14)$$

En introduisant

$$\langle a_i^2(r, z)\rangle = f \int_{-\infty}^{\infty} a_i^2(r, z;\ t)\, dt$$

[v. (3.2.3)] et en tenant compte de (2.4.40), récrivons (3.2.14) sous la forme

$$-\nabla_r^2 \Delta k_{at}(r, z) = \frac{c}{P_{cr}} \sum_{i=1}^{2} \delta_i n_i \langle a_i^2(r, z)\rangle \qquad (3.2.15)$$

ou encore

$$-\nabla_\rho^2 \Delta k_{at}(\rho, z) = \frac{c\rho_0^2}{P_{cr}} \sum_{i=1}^{2} \delta_i n_i \langle a_i^2(\rho, z)\rangle, \qquad (3.2.16)$$

où $\rho = r/\rho_0$.

En se servant de l'équation de la chaleur, on utilise différentes conditions aux limites [10]. Les conditions aux limites *de première espèce* imposent des valeurs déterminées de la température à la surface du corps. Les conditions aux limites *de deuxième espèce* déterminent sur la surface du corps la dérivée de la température par rapport à la normale à la surface (autrement dit, elles déterminent la densité de flux de chaleur à travers la surface). Les conditions aux limites *de troisième espèce* supposent que le flux de chaleur à travers la surface du corps est proportionnel à la différence de température entre la surface et le thermostat ; dans ce cas c'est le facteur de proportionnalité (on l'appelle *coefficient de transmission de chaleur*) qui est donné.

Dans le cas que nous considérons les conditions aux limites de troisième espèce peuvent s'exprimer par la relation

$$-(\varkappa/\rho_0)(\partial \Delta T/\partial \rho)_{\rho=\rho'} = \alpha [T(\rho') - T_0], \qquad (3.2.17)$$

où α est le coefficient de transmission de chaleur ; $\rho' = r_0/\rho_0$. En tenant compte de (3.2.8a) et (3.2.9a), mettons (3.2.17) sous la forme

$$-(\varkappa/\rho_0)(\partial \Delta k_{at}/\partial \rho)_{\rho=\rho'} = \alpha [\Delta k_0 - 4\pi\varkappa (T_0 - T_s)/P_{cr}].$$

Récrivons cette expression :

$$(\partial \Delta k_{at}/\partial \rho)_{\rho=\rho'} = (\Gamma - \Delta k_0)\, \rho' \mathrm{Bi}, \qquad (3.2.18)$$

avec

$$\Gamma = 4\pi\varkappa (T_0 - T_s)/P_{cr}, \tag{3.2.19}$$

$$\mathrm{Bi} = \alpha r_0/\varkappa. \tag{3.2.20}$$

Le paramètre sans dimension Bi (dit *paramètre de Biot*) caractérise le degré du contact thermique à la surface de séparation entre le cristal et le thermostat. Quand Bi $\to \infty$, le contact thermique s'approche de son état *idéal*, ce qui est équivalent à l'absence du flux de chaleur à travers la surface latérale du cristal. Dans ce cas la condition à la limite (3.2.18) doit être remplacée par une condition de première espèce (la température constante de la surface du cristal étant donnée).

Système d'équations pour la génération de deuxième harmonique tenant compte des auto-actions thermiques. — Partons du système d'équations tronquées (3.2.28). En posant $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ et en utilisant (3.2.7), récrivons ce système sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &\partial a_1/\partial z = -\sigma a_1 a_2 \sin\Psi - \delta_1 a_1;\\ &\partial a_2/\partial z = \sigma a_1^2 \sin\Psi - \delta_2 a_2;\\ &\partial\Psi/\partial z = \Delta k_0 + \Delta k_{at} + \sigma\cos\Psi\,(a_1^2 - 2a_2^2)/a_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.2.21}$$

Introduisons au lieu de z la variable $\xi = z\sigma a_{10}$, où a_{10} est l'amplitude réelle de l'onde fondamentale à l'entrée du cristal, sur l'axe du faisceau, au maximum de l'impulsion. En outre, désignons

$$u_{1,2} = a_{1,2}/a_{10}; \quad \delta'_{1,2} = \delta_{1,2}/\sigma a_{10}; \quad \Delta k' = \Delta k/2\sigma a_{10}. \tag{3.2.22}$$

Le système d'équations (3.2.21) prend alors la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} &\partial u_1/\partial\xi = -u_1 u_2 \sin\Psi - \delta'_1 u_1;\\ &\partial u_2/\partial\xi = u_1^2 \sin\Psi - \delta'_2 u_2;\\ &\partial\Psi/\partial\xi = 2(\Delta k'_0 + \Delta k'_{at}) + (u_1^2 - 2u_2^2)\cos\Psi/u_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.23}$$

La génération de deuxième harmonique en tenant compte des auto-actions thermiques peut être examinée en résolvant le système d'équations raccourcies (3.2.23) conjointement avec l'équation de la chaleur (3.2.16). Il s'agit donc de résoudre le système d'équations suivantes par rapport aux fonctions $u_{1,2}(\rho, \xi; t)$, $\Psi(\rho, \xi)$, $\Delta k'_{at}(\rho, \xi)$:

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial u_1/\partial\xi = -u_1 u_2 \sin\Psi - \delta'_1 u_1;\\ &\partial u_2/\partial\xi = u_1^2 \sin\Psi - \delta'_2 u_2;\\ &\partial\Psi/\partial\xi = 2(\Delta k'_0 + \Delta k'_{at}) + (u_1^2 - 2u_2^2)\cos\Psi/u_2;\\ &-\nabla_\rho^2 \Delta k'_{at}(\rho, \xi) = \frac{c\rho_0^2 a_{10}^2}{2P_{cr}} \sum_{i=1}^{2} \delta'_i n_i \langle u_i^2(\rho, \xi)\rangle \end{aligned}} \tag{3.2.24}$$

avec les *conditions aux limites*

$$u_1(\rho,\ 0;\ t) = U(\rho;\ t);\quad u_2(\rho,\ 0;\ t) = 0; \tag{3.2.25}$$

$$(\partial \Delta k'_{\text{at}}/\partial \rho)_{\rho=\rho'} = (\Gamma' - \Delta k'_0)\,\rho'\,\text{Bi}, \tag{3.2.26}$$

où $\Gamma' = \Gamma/2\sigma a_{10}$.

Les trois premières équations du système (3.2.24) sont des *équations tronquées* et la quatrième est l'*équation de la chaleur.*

Etant donné qu'en pratique on utilise des cristaux non linéaires faiblement absorbants, dans les équations tronquées du système (3.2.24) on peut négliger les pertes par absorption [1]) du rayonnement. Mais ceci est en principe inadmissible pour l'équation de la chaleur. Ainsi, sans nuire en rien à la généralité des résultats, on peut considérer le système d'équations suivant:

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial u_1/\partial\xi = -u_1u_2\sin\Psi;\quad \partial u_2/\partial\xi = u_1^2\sin\Psi;\\ &\partial\Psi/\partial\xi = 2(\Delta k'_0 + \Delta k'_{\text{at}}) + (u_1^2 - 2u_2^2)\cos\Psi/u_2;\\ &-\nabla_\rho^2\,\Delta k'_{\text{at}}(\rho,\ \xi) = \frac{c\rho_0^2a_{10}^2}{2P_{\text{cr}}}\sum_{i=1}^{2}\delta'_i n_i\,\langle u_i^2(\rho,\ \xi)\rangle \end{aligned}} \tag{3.2.27}$$

Remarquons qu'en vertu de (2.4.10) et (3.2.3)

$$S_1(\rho,\ 0) = \frac{cn_1}{8\pi}a_{10}^2\,\langle u_1^2(\rho,\ 0)\rangle = \frac{cn_1}{8\pi}a_{10}^2 f\int_{-\infty}^{\infty} u_1^2(\rho,\ 0;\ t)\,dt. \tag{3.2.28}$$

Par raison de simplicité, supposons que les impulsions d'onde fondamentale et du deuxième harmonique sont de *forme rectangulaire* (dans le temps)

$$u_{1,2}(\rho,\ \xi;\ t) = \begin{cases} u_{1,2}(\rho,\ \xi;\ 0) & \text{pour } |t| < \tau_1/2;\\ 0 & \text{pour } |t| > \tau_1/2, \end{cases} \tag{3.2.29}$$

alors on tire de (3.2.28)

$$S_1(\rho,\ 0) = cn_1a_{10}^2 f\tau_1 u_1^2(\rho,\ 0;\ 0)/8\pi. \tag{3.2.28a}$$

Comme $u_1(0,\ 0;\ 0) = 1$, on a

$$S_{10} = S_1(0,\ 0) = cn_1a_{10}^2 f\tau_1/8\pi. \tag{3.2.30}$$

En utilisant (3.2.2) et en comparant les expressions écrites plus haut, nous pouvons conclure que

$$u_1^2(\rho,\ 0;\ 0) = \exp(-2\rho^2); \tag{3.2.31}$$

$$\langle u_1^2(\rho,\ 0)\rangle = f\tau_1\exp(-2\rho^2). \tag{3.2.32}$$

---

[1]) Dans ce cas général, $\delta_{1,2} \leqslant 10^{-2}$ cm^{-1}. En prenant $l = 1$ à 4 cm, on trouve que $\exp[-(\delta_1 + \delta_2)\,l]$ ne diffère de l'unité que par 2 à 8 %.

Signalons que les impulsions lumineuses rectangulaires (dans le temps) satisfont à la relation

$$\langle u_{1,2}^2(\rho, \xi)\rangle = f\tau_1 u_{1,2}^2(\rho, \xi; 0). \qquad (3.2.33)$$

Equation de la chaleur et puissance de rayonnement moyenne; paramètres de l'auto-action thermique. — La puissance moyenne du rayonnement fondamental dans une certaine section ξ a pour expression

$$\langle P_1(\xi)\rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho'} d\rho\, \rho\rho_0^2 \frac{cn_1}{8\pi} a_{10}^2 \langle u_1^2(\rho, \xi)\rangle =$$

$$= \frac{1}{4} cn_1 (\rho_0 a_{10})^2 \int_0^{\rho'} \langle u_1^2(\rho, \xi)\rangle \rho d\rho. \qquad (3.2.34a)$$

D'une manière analogue, la puissance moyenne du deuxième harmonique s'exprime par

$$\langle P_2(\xi)\rangle = \frac{1}{4} cn_2 (\rho_0 a_{10})^2 \int_0^{\rho'} \langle u_2^2(\rho, \xi)\rangle \rho d\rho. \qquad (3.2.34b)$$

En se servant de (3.2.32), on tire de (3.2.34a)

$$\langle P_1(0)\rangle = \frac{1}{4} f\tau_1 cn_1 (\rho_0 a_{10})^2 \int_0^{\rho'} \exp(-2\rho^2)\rho d\rho =$$

$$= f\tau_1 cn_1 (\rho_0 a_{10}/4)^2 [1 - \exp(-2\rho'^2)]. \qquad (3.2.35)$$

En posant $\rho' \gg 1$, on peut considérer de façon approchée que

$$\langle P_1(0)\rangle = f\tau_1 cn_1 (\rho_0 a_{10}/4)^2. \qquad (3.2.36)$$

En négligeant dans les équations tronquées les pertes par absorption du rayonnement, on peut considérer que

$$\langle P_1(\xi)\rangle + \langle P_2(\xi)\rangle = \langle P_1(0)\rangle. \qquad (3.2.37)$$

Intégrons la quatrième équation du système (3.2.27) (équation de la chaleur) sur ρ de zéro à ρ'. Il vient

$$-\rho' \left(\frac{\partial \Delta k'_{at}}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho'} = \frac{c\rho_0^2 a_{10}^2}{2P_{cr}} \sum_{i=1}^{2} \delta'_i n_i \int_0^{\rho'} \langle u_i^2(\rho, \xi)\rangle \rho d\rho. \qquad (3.2.38)$$

En faisant usage de (3.2.34), mettons (3.2.38) sous la forme

$$-\rho' \left(\frac{\partial \Delta k'_{at}}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho'} = \frac{2}{P_{cr}} \sum_{i=1}^{2} \delta'_i \langle P_i(\xi)\rangle$$

ou encore

$$-\rho'\left(\frac{\partial \Delta k'_{at}}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho'}=\sum_{i=1}^{2} \nu_i \langle P_i(\xi)\rangle / \langle P_1(0)\rangle, \qquad (3.2.39)$$

où

$$\nu_i = 2\delta'_i \langle P_1(0)\rangle / P_{cr} \qquad (3.2.40)$$

sont des *paramètres* dits d'*auto-action thermique*.

De (3.2.39) et (3.2.26) il résulte que

$$\Delta k'_0(\xi)-\Gamma'=\sum_{i=1}^{2} \nu_i \langle P_i(\xi)\rangle / \langle P_1(0)\rangle \text{ Bi}. \qquad (3.2.41)$$

En introduisant le coefficient de conversion en énergie (en puissance moyenne)

$$\eta_2(\xi)=\langle P_2(\xi)\rangle / \langle P_1(0)\rangle \qquad (3.2.42)$$

et en tenant compte de (3.2.37), récrivons (3.2.41) sous la forme

$$\Delta k'_0(\xi)-\Gamma'=[\nu_1(1-\eta_2(\xi))+\nu_2\eta_2(\xi)]/\text{Bi}. \qquad (3.2.43)$$

Contact thermique idéal, la dispersion des paramètres d'auto-action thermique étant nulle. — Proposons-nous d'analyser les différentes situations [9], [11] à [15]. Commençons par le cas où

$$1/\text{Bi} = 0; \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu. \qquad (3.2.44)$$

La condition $1/\text{Bi} = 0$ signifie que le contact thermique examiné est idéal. La condition $\nu_1 = \nu_2$ veut dire que les pertes par absorption du rayonnement dans le cristal sont les mêmes pour l'onde fondamentale et pour le deuxième harmonique ($\delta_1 = \delta_2 = \delta$). Pour un contact thermique idéal on a

$$T(\rho', \xi) = T_0. \qquad (3.2.45)$$

Dans ce cas les conditions aux limites sont de première espèce: la température de la surface du cristal est égale à la température du thermostat.

En tenant compte de (3.2.29) et (3.2.36) et en supposant que $n_1 = n_2 = n$, récrivons la quatrième équation du système (3.2.27) (équation de la chaleur) sous la forme

$$-\nabla^2_\rho \Delta k'_{at}(\rho, \xi)=\frac{8\langle P_1(0)\rangle}{P_{cr}} \sum_{i=1}^{2} \delta'_i u_i^2(\rho, \xi; 0). \qquad (3.2.46)$$

Dans le cas considéré $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ (et donc $\delta'_1 = \delta'_2 \equiv \delta'$), ce qui permet, en tenant compte de (3.2.40), d'écrire (3.2.46) sous la forme

$$-\nabla^2_\rho \Delta k'_{at}(\rho, \xi)=4\nu \sum_{i=1}^{2} u_i^2(\rho, \xi; 0). \qquad (3.2.47)$$

Puis, remarquons qu'en vertu de (3.2.37)

$$\langle u_1^2(\rho,\ \xi)\rangle + \langle u_2^2(\rho,\ \xi)\rangle = \langle u_1^2(\rho,\ 0)\rangle$$

et, par conséquent,

$$u_1^2(\rho,\ \xi\ ;\ 0) + u_2^2(\rho,\ \xi\ ;\ 0) = u_1^2(\rho,\ 0\ ;\ 0). \qquad (3.2.48)$$

En introduisant (3.2.48) dans (3.2.47) et en utilisant (3.2.31), on obtient

$$-\nabla_\rho^2 \Delta k'_{\rm at}(\rho) = 4\nu \exp(-2\rho^2). \qquad (3.2.49)$$

En définitive, le système d'équations (3.2.27) prend la forme

$$\boxed{\begin{gathered} \partial u_1/\partial\xi = -u_1 u_2 \sin\Psi\ ;\ \partial u_2/\partial\xi = u_1^2 \sin\Psi\ ; \\ \partial\Psi/\partial\xi = 2(\Delta k'_0 + \Delta k'_{\rm at}) + (u_1^2 - 2u_2^2)\cos\Psi/u_2\ ; \\ -\nabla_\rho^2 \Delta k'_{\rm at}(\rho) = 4\nu \exp(-2\rho^2). \end{gathered}} \qquad (3.2.50)$$

Attirons l'attention sur le fait que l'équation de la chaleur s'est « détachée » des équations tronquées. Physiquement, ceci est lié à ce que le régime thermique se détermine par l'absorption de la puissance moyenne totale des ondes en interaction, absorption qui est dans le cas considéré (pour $\nu_1 = \nu_2$) pratiquement constante dans toute section ξ du cristal. Comme le montre (3.2.49), le désaccord thermique $\Delta k'_{\rm at}$ dépend uniquement de la variable radiale ρ et ne varie pas suivant la longueur du cristal.

Intégrons successivement (3.2.49), il vient

$$\rho \frac{d}{d\rho} \Delta k'_{\rm at}(\rho) = -4\nu \int_0^\rho \rho e^{-2\rho^2}\, d\rho = \nu (e^{-2\rho^2} - 1)\ ;$$

$$\Delta k'_{\rm at}(\rho) - \Delta k'_{\rm at}(0) = \nu \int_0^\rho (e^{-2\rho^2} - 1) \frac{d\rho}{\rho}. \qquad (3.2.51)$$

En introduisant une variable d'intégration $y = 2\rho^2$ récrivons (3.2.51) sous la forme

$$\Delta k'_{\rm at}(\rho) - \Delta k'_{\rm at}(0) = \frac{\nu}{2} \int_0^{2\rho^2} (e^{-y} - 1) \frac{dy}{y}. \qquad (3.2.52)$$

En tenant compte que

$$\int_0^{2\rho^2} (e^{-y} - 1) \frac{dy}{y} = {\rm Ei}(-2\rho^2) - \ln(2\rho^2) - C, \qquad (3.2.53)$$

où $\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} (e^{y}/y)\, dy$ est une fonction exponentielle intégrale, $C = 0{,}5772$, la constante d'Euler-Mascheroni, on obtient finalement

$$\boxed{\Delta k'_{\mathrm{at}}(\rho) = \Delta k'_{\mathrm{at}}(0) - \frac{\nu}{2}\,[\ln(2\rho^2) - \mathrm{Ei}(-2\rho^2) + C].} \qquad (3.2.54)$$

En faisant usage de la relation

$$\Delta k'_{\mathrm{at}}(\rho) = 2\pi\varkappa\,[T(\rho) - T(\rho')]/\sigma a_{10} P_{\mathrm{cr}} \qquad (3.2.55)$$

qui découle de (3.2.9a), récrivons (3.2.54), compte tenu de (3.2.40), sous la forme

$$T(\rho) - T(0) = -(\langle P_1(0)\rangle\,\delta/2\pi\varkappa)\,[\ln(2\rho^2) - \mathrm{Ei}(-2\rho^2) + C]. \qquad (3.2.56)$$

En posant $\rho = \rho'$ et vu que pour le contact thermique idéal $T(\rho') = T_0$, on déduit de (3.2.56) l'expression suivante pour la température sur l'axe du faisceau :

$$T(0) = T_0 + (\langle P_1(0)\rangle\,\delta/2\pi\varkappa)\,[\ln(2\rho^2) - \mathrm{Ei}(-2\rho^2) + C]. \qquad (3.2.57)$$

Soient $\delta = 10^{-2}$ cm^{-1}, $\varkappa = 2{,}6\cdot 10^{-3}$ W/(cm·K) ($LiNbO_3$), $\langle P_1(0)\rangle = 10$ W, $\rho' = 2$. Dans ce cas, $T(0) - T_0 = 2$ K, ce qui est en général sensiblement plus grand que la largeur de la courbe de température de synchronisme.

Remarques sur le désaccord thermique optimal. — Le désaccord global $\Delta k(r)$ à la distance r de l'axe du faisceau a pour expression

$$\Delta k(r) = \Delta k_0 + \Delta k_{\mathrm{at}}(r) = 4\pi\varkappa\,[T(r) - T_s]/P_{\mathrm{cr}}. \qquad (3.2.58)$$

En faisant varier la température T_0 du thermostat, on peut évidemment régler la température $T(r)$ et assurer la réalisation de la condition de synchronisme (c'est-à-dire l'égalité $T(r) - T_s = 0$) pour différentes valeurs de r. A la fig. 3.5, *a* la condition de synchronisme est satisfaite sur l'axe du faisceau (pour $r = 0$); en tous les points non situés sur l'axe du faisceau on a $\Delta k(r) < 0$. A la fig. 3.5, *b*, la condition de synchronisme est réalisée pour $r = r_1$; $\Delta k < 0$ pour $r > r_1$ et $\Delta k > 0$ pour $0 \leqslant r < r_1$.

En partant des considérations générales, on peut conclure que la réalisation de la condition de synchronisme sur l'axe du faisceau n'est pas nécessairement optimale au point de vue de l'obtention d'une puissance de sortie maximale du deuxième harmonique. Le fait est que pour $r = 0$ le faisceau fondamental se caractérise par la plus grande intensité; de ce fait, pour des rayons partiels passant près de l'axe, le processus de génération de deuxième harmonique peut se dérouler d'une façon suffisamment efficace même pour $\Delta k(0) \neq 0$. Si l'on accomplit la condition de synchronisme pour une cer-

taine valeur non nulle de la variable radiale r_1, le processus de conversion peut être rendu suffisamment efficace également pour des rayons distants de l'axe du faisceau dans les limites de r_1. Comme résultat on pourra obtenir un maximum de puissance du deuxième harmonique. Le désaccord $\Delta k_{at}(r_1)$ est appelé dans ce cas *désaccord*

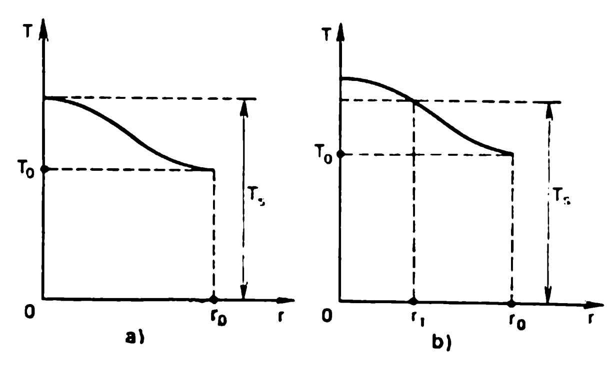


Fig. 3.5

thermique optimal. La valeur de r_1 et donc la température désirée du thermostat peuvent être trouvées par suite de l'optimisation de la fonction $P_2(\Delta k(0))$.

Approximation du champ constant du rayonnement fondamental. — A cette approximation, qui est caractéristique des lasers continus monomodes à génération de deuxième harmonique en dehors du résonateur optique, l'équation de la chaleur (3.2.54) se trouve nettement plus simple à résoudre. Le fait est que pour de faibles intensités du rayonnement fondamental, caractéristiques de l'émission continue, la contribution apportée aux effets thermiques par les « ailes » de la distribution gaussienne de l'amplitude d'onde peut être négligée. Autrement dit, on peut se borner à la considération du champ thermique seulement au voisinage de l'axe du faisceau. Pour de faibles valeurs de ρ on a la relation [5]

$$\mathrm{Ei}(-2\rho^2) = \ln(2\rho^2) + C - 2\rho^2 + \rho^4 - \ldots \qquad (3.2.59)$$

En négligeant dans (3.2.59) les termes au-delà de ρ^2, mettons (3.2.54) sous la forme

$$\Delta k'_{at}(\rho) \approx \Delta k'_{at}(0) - \nu\rho^2. \qquad (3.2.60)$$

Le champ thermique au voisinage de l'axe du faisceau variera lui aussi comme carré de ρ [12]. En faisant usage de (3.2.56), on obtient dans ce cas

$$T(\rho) - T(0) = -\langle P_1(0)\rangle \rho^2\delta/\pi\varkappa. \qquad (3.2.61)$$

A l'approximation du champ constant, au lieu de l'amplitude $u_1(\rho, \xi; 0)$ il convient de prendre $U(\rho) = u_1(\rho, 0; 0)$ et en outre avoir en vue que $u_2 \ll U$. En définitive, le système (3.2.50) devient

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial u_2/\partial\xi = U^2 \sin\Psi; \\ &\partial\Psi/\partial\xi = 2(\Delta k_0' + \Delta k_{at}') + U^2 \cos\Psi/u_2, \end{aligned}} \tag{3.2.62}$$

où $\Delta k_{at}'(\rho)$ est donnée par la relation (3.2.60). En utilisant les résultats du § 2.4 [v. notamment (2.4.3) et (2.4.31)], on peut obtenir pour $\langle u_2^2(\rho, \xi)\rangle$, dans le cas des impulsions de forme rectangulaire, l'expression suivante:

$$\langle u_2^2(\rho, \xi)\rangle = f\tau_u u_2^2(\rho, \xi; 0) = \\ = f\tau_u \xi^2 \exp(-2\rho^2)\,\mathrm{sinc}^2(\Delta k'(\rho)\xi), \tag{3.2.63}$$

avec

$$\Delta k'(\rho) = \Delta k_0' + \Delta k_{at}'(\rho).$$

En se servant de (3.2.63) et de (3.2.34b), on trouve l'expression suivante pour la puissance moyenne du deuxième harmonique à la sortie du cristal:

$$\langle P_2(l)\rangle = f\tau_1 \frac{cn}{4}(\rho_0 a_{10}\xi(l))^2 \int_0^{\rho'} e^{-2\rho^2}\,\mathrm{sinc}^2(\Delta k'(\rho)\,\xi(l))\,\rho d\rho, \tag{3.2.64}$$

avec

$$\xi(l) = \sigma a_{10} l. \tag{3.2.65}$$

En tenant compte de (3.2.36), mettons (3.2.64) sous la forme

$$\langle P_2(l)\rangle = P_{20}(l)\,F(\rho'), \tag{3.2.66}$$

où

$$P_{20}(l) = (4\sigma l\,\langle P_1(0)\rangle)^2/cn\rho_0^2 f\tau_u \tag{3.2.67}$$

est la puissance de sortie du deuxième harmonique en l'absence d'effets thermiques et de désaccord,

$$F(\rho') = 4\int_0^{\rho'} e^{-2\rho^2}\,\mathrm{sinc}^2(\Delta k'(\rho)\,\xi(l))\,\rho d\rho \tag{3.2.68}$$

est la fonction décrivant la diminution de l'efficacité de la conversion par suite des auto-actions thermiques.

Supposons que l'axe du faisceau soit maintenu à la température de synchronisme (fig. 3.5, *a*):

$$\Delta k'(0) = \Delta k_0' + \Delta k_{at}'(0) = 0. \tag{3.2.69}$$

En remplaçant par l'infini la borne supérieure d'intégration dans (3.2.68), on obtient dans ce cas [compte tenu de (3.2.60)]

$$F = 4 \int_0^\infty e^{-2\rho^2} \operatorname{sinc}^2 (\nu \rho^2 \sigma a_{10} l)\, \rho d\rho. \qquad (3.2.70)$$

La courbe de variation de F en fonction de ν définie par la relation (3.2.70) est représentée sur la fig. 3.6. On démontre que pour

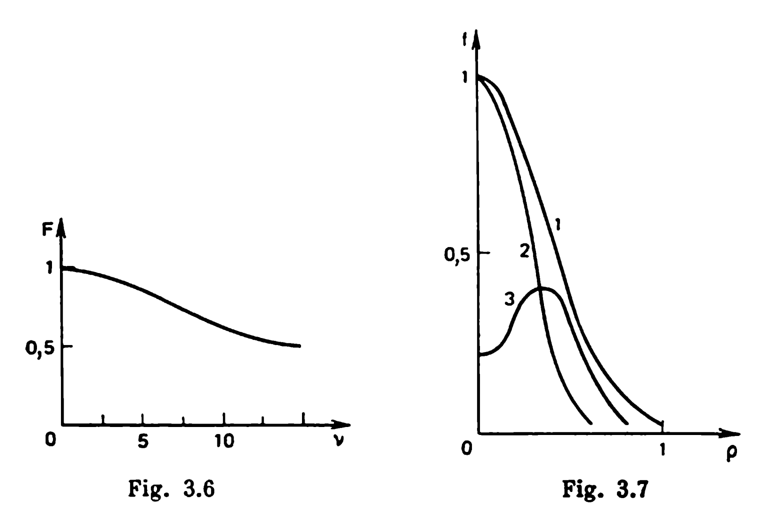


Fig. 3.6 Fig. 3.7

$\nu \gg 1$, $F \sim 1/\nu$. Puisque $\nu \sim \langle P_1 (0) \rangle$, la fonction $\langle P_2 (l) \rangle \sim \langle P_1 (0) \rangle^2$ se transforme, pour $\nu \gg 1$, en fonction $\langle P_2 (l) \rangle \sim \langle P_1 (0) \rangle$ et le coefficient de conversion η_2 passe à la saturation.

Examinons la fonction sous le signe d'intégration dans (3.2.68)

$$f(\rho) = \exp(-2\rho^2) \operatorname{sinc}^2 [(\Delta k' (0) - \nu \rho^2) \xi (l)]. \qquad (3.2.71)$$

Les courbes représentatives de cette fonction sont montrées sur la fig. 3.7 [8], [14] : *1*) $\nu = 0$, $\Delta k' (0) = 0$ (les effets thermiques et le désaccord sont nuls) ; *2*) $\nu = 8$, $\Delta k' (0) = 0$; *3*) $\nu = 8$, $\Delta k' (0) = 2$. On voit que si la température sur l'axe du faisceau est maintenue égale à la température de synchronisme (par choix approprié de T_0), c'est-à-dire si l'on assure $\Delta k'(0) = 0$ (courbes *1* et *2*), le champ du deuxième harmonique dans la région proche, décrit par la fonction $f(\rho)$, se concentre dans une tache ronde de diamètre $2\rho_0$. Pour $\Delta k'(0) \neq 0$, la condition de synchronisme se trouve satisfaite non sur l'axe du faisceau mais sur un cercle de rayon ρ_1 défini par la relation

$$\Delta k' (0) = \nu \rho_1^2. \qquad (3.2.72)$$

Dans ce cas le champ proche du deuxième harmonique affecte une structure annulaire (courbe *3*).

Régime non linéaire. — S'il est nécessaire de tenir compte de la rétroaction de l'onde du deuxième harmonique sur l'onde fondamentale, il faut partir du système d'équations tronquées faisant partie de (3.2.50) et utiliser la solution de l'équation de la chaleur (3.2.54). La fig. 3.8, *a* représente des courbes, calculées sur ordinateur, de variation du coefficient de conversion en densité de puissance η_2^s en fonction de la variable $\rho\sqrt{2}$ pour $\xi l = 2$ [14] (rappelons que nous considérons le cas où $1/\mathrm{Bi} = 0$; $\nu_1 = \nu_2$; les impulsions d'omission sont de forme rec-

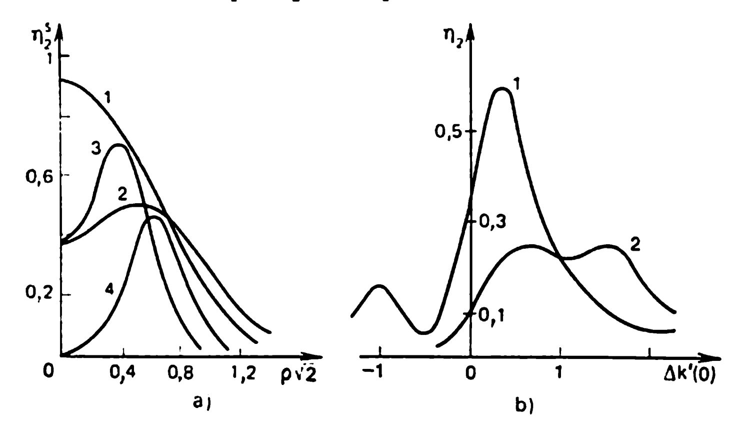


Fig. 3.8

tangulaire): *1*) $\nu = 1{,}5$, $\Delta k'(0) = 0$; *2*) $\nu = 1{,}5$, $\Delta k'(0) = 1$; *3*) $\nu = 5$, $\Delta k'(0) = 1$; *4*) $\nu = 5$, $\Delta k'(0) = 2$. Les courbes *2* à *4* montrent la structure annulaire du rayonnement de deuxième harmonique.

La fig. 3.8, *b* montre les courbes traduisant a variation du coefficient de conversion en puissance moyenne η_2 en fonction de $\Delta k'(0)$ (courbes de synchronisme) pour $\xi(l) = 3$, $\nu = 1{,}5$ (courbe *1*) et $\nu = 5$ (courbe *2*) [14]. On voit que le maximum de coefficient de conversion se déplace vers la région de $\Delta k'(0) > > 0$; ceci signifie que le désaccord thermique optimal correspond à la température de synchronisme non pas sur l'axe du faisceau mais sur l'anneau d'un cer tain rayon. On voit également que l'efficacité de la conversi n diminue lors que ν augmente.

Dispersion des paramètres d'auto-action thermique dans le cas du contact thermique idéal. — Envisageons une situation lorsque

$$1/\mathrm{Bi} = 0;\quad \nu_1 \neq \nu_2\ (\delta_1 \neq \delta_2). \tag{3.2.73}$$

En substituant dans (3.2.38) la variable ρ au paramètre ρ' et en considérant des impulsions lumineuses rectangulaires de durée τ_1, écrivons [compte tenu de (3.2.33)]

$$-\rho\,\frac{\partial \Delta k'_{\mathrm{at}}}{\partial \rho} = f\tau_1 \frac{c\rho_0^2 a_{10}^2}{2P_{\mathrm{cr}}} \sum_{i=1}^{2} \delta_i' n_i \int_0^{\rho} u_i^2(\mu,\ \xi;\ 0)\,\mu\, d\mu \tag{3.2.74}$$

[pour éviter toute confusion, la variable d'intégration ρ dans l'intégrale (3.2.38) est notée maintenant μ]. En faisant usage de (3.2.40)

et (3.2.36), récrivons (3.2.74) sous la forme

$$-\rho \frac{\partial \Delta k'_{at}}{\partial \rho} = \frac{4}{n_1} \sum_{i=1}^{2} \nu_i n_i \int_0^{\rho} u_i^2 (\mu, \xi; 0) \mu d\mu. \qquad (3.2.75)$$

En tenant compte de (3.2.75), remplaçons (3.2.27) par le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{|c|}\hline \partial u_1/\partial \xi = -u_1 u_2 \sin \Psi ; \; \partial u_2/\partial \xi = u_1^2 \sin \Psi ; \\ \partial \Psi/\partial \xi = 2(\Delta k'_0 + \Delta k'_{at}) + (u_1^2 - 2u_2^2) \cos \Psi / u_2 ; \\ -\rho \dfrac{\partial \Delta k'_{at}}{\partial \rho} = \dfrac{4}{n_1} \sum\limits_{i=1}^{2} \nu_i n_i \int\limits_0^{\rho} u_i^2 (\mu, \xi; 0) \mu d\mu. \\ \hline \end{array} \qquad (3.2.76)$$

On voit que l'équation de la chaleur est à résoudre conjointement avec les équations raccourcies.

Le recours à (3.2.76) amène aux résultats qui sont sous plusieurs rapports similaires à ceux obtenus sur la base de (3.2.50), mais il existe également entre eux une différence qualitative importante. Elle réside en ce que pour $\nu_1 \neq \nu_2$ une des pentes de la courbe de synchronisme $\eta_2 (\Delta k' (0))$ devient abrupte (jusqu'à l'apparition d'un point pour lequel $\partial \eta_2/\partial \Delta k' (0) = \infty$ et qui est le *point de coupure* de la courbe de synchronisme ; en ce point le processus devient instable).

L'*augmentation de la pente de la courbe* de synchronisme peut être expliquée à l'aide des raisonnements bien simples suivants. Supposons que $\delta_1 < \delta_2$ et que $T_0 < T_{opt}$, où T_{opt} est la température de la surface du cristal pour laquelle on atteint le maximum de la puissance de sortie moyenne du deuxième harmonique $\langle P_2(l) \rangle_{max}$. Chauffons la surface latérale du cristal, c'est-à-dire augmentons la température T_0. Au fur et à mesure que T_0 s'approche de T_{opt}, la puissance de sortie $\langle P_2 (l) \rangle$ croîtra (en s'approchant de $\langle P_2 (l) \rangle_{max}$, alors que $\langle P_1 (l) \rangle$ décroîtra. Comme $\delta_1 < \delta_2$, la croissance de $\langle P_2 (l) \rangle$ aura pour effet d'augmenter la quantité totale de la chaleur dégagée dans le cristal (par suite de l'absorption de l'énergie de l'onde fondamentale et du deuxième harmonique). De ce fait, la température du cristal et donc celle de sa surface augmentera avec une vitesse *croissante* ; corrélativement la croissance de $\langle P_2 (l) \rangle$ sera *de plus en plus rapide*. Ainsi, en chauffant la surface du cristal, on initie dans ce cas des processus qui provoquent son échauffement *encore plus intense*. C'est une telle réaction positive qui conditionne l'augmentation de la pente de la branche de gauche sur la courbe de synchronisme [1]).

---

[1]) Pour $\delta_1 > \delta_2$ c'est la pente de la branche de droite de la courbe de synchronisme qui augmentera.

Les résultats de l'intégration numérique des équations (3.2.76) sont illustrés par la fig. 3.9 [15], [16]. Cette figure montre les courbes de synchronisme η_2 ($\Delta k'$ (0)) calculées pour $\nu_1 = 0$; $\nu_2 = 5.64$ ($\delta_2' = 10^{-2}$), $\rho' = 4$ avec différentes valeurs du paramètre ξ (l): 1,5 (courbe *1*), 2,0 (courbe *2*), 3,0 (courbe *3*). On voit bien que la pente de la branche de gauche des courbes de synchronisme augmente avec la longueur réduite du cristal.

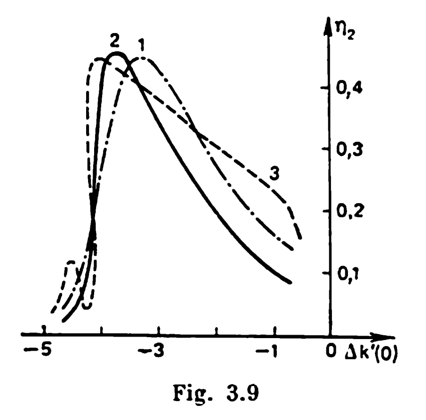


Fig. 3.9

Contact thermique non idéal, la dispersion des paramètres de l'auto-action thermique étant nulle. — Dans ce cas

$$1/\text{Bi} \neq 0\,; \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu. \quad (3.2.77)$$

Pour $\nu_1 = \nu_2$ on tire de (3.2.43)

$$\Delta k_0' - \Gamma' = \nu/\text{Bi}. \quad (3.2.78)$$

Ceci signifie que la courbe de synchronisme η_2 (Γ') *se déplace toute entière*, de la quantité ν/Bi vers les désaccords négatifs. Pour le reste, le processus de génération de deuxième harmonique se déroule qualitativement comme dans le cas où $1/\text{Bi} = 0$, $\nu_1 = \nu_2$.

En tenant compte de (3.2.8a), (3.2.19) et (3.2.40), on déduit de (3.2.78) que la différence de température à la frontière entre le cristal et le thermostat a pour valeur

$$T(r_0) - T_0 = \delta \langle P_1(0) \rangle / \pi \varkappa \, \text{Bi}. \quad (3.2.79)$$

Ainsi pour $\delta = 10^{-2}$ cm^{-1}, $\varkappa = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$ W/(cm·K), Bi = 5, $\langle P_1(0) \rangle =$ = 5 W, on obtient $T(r_0) - T_0 = 1{,}2$ K. Cette différence de température, qui semble très petite au premier abord, dépasse néanmoins la largeur de la courbe de température de synchronisme.

Dispersion des paramètres de l'auto-action thermique dans le cas du contact thermique non idéal; caractère hystérétique de la courbe de synchronisme. — Supposons que

$$1/\text{Bi} \neq 0\,; \quad \nu_1 \neq \nu_2. \quad (3.2.80)$$

En tenant compte de (3.2.8a), (3.2.19) et (3.2.40), mettons (3.2.43) sous la forme

$$T(\rho', \xi) - T_0 = [\delta_1 (1 - \eta_2(\xi)) + \delta_2 \eta_2(\xi)] \langle P_1(0) \rangle / \pi \varkappa \, \text{Bi}. \quad (3.2.81)$$

La dépendance vis-à-vis de ξ signifie que la condition à la limite de troisième espèce est réalisée dans les différentes sections ξ avec des différences de température à la frontière entre le cristal et le thermostat dépendant de la valeur de η_2 (ξ) qui dépend à son tour de T (ρ', ξ).

En relevant une courbe de synchronisme, l'expérimentateur fait varier la température du thermostat, c'est-à-dire détermine la variation de η_2 en fonction de la température T_0. Conformément à (3.2.19) cette dépendance peut être considérée comme celle de η_2 vis-à-vis de Γ'. Puis, tenons compte du fait que le coefficient de conversion $\eta_2(\xi)$ dépend de $T(\rho', \xi)$, c'est-à-dire [en vertu de (3.2.8a)] de $\Delta k'_0(\xi)$. Selon (3.2.43), le désaccord $\Delta k'_0(\xi)$ dépend à son tour de $\eta_2(\xi)$. Ainsi, en faisant usage de (3.2.43), on peut écrire

$$\eta_2(\Delta k'_0(\xi)) = f[\Gamma + \nu_1(1-\eta_2)/\mathrm{Bi} + \nu_2\eta_2/\mathrm{Bi}] \qquad (3.2.82)$$

(l'expression entre crochets est l'argument de la fonction f).

Récrivons (3.2.82) sous la forme

$$G(\eta_2\Gamma') = 0, \qquad (3.2.83)$$

où

$$G(\eta_2, \Gamma') = \eta_2 - f(\eta_2, \Gamma'). \qquad (3.2.84)$$

L'équation (3.2.83) renferme la dépendance de η_2 vis-à-vis de Γ' sous forme implicite.

Dérivons (3.2.83) par rapport à Γ', il vient

$$\partial G/\partial\Gamma' + (\partial G/\partial\eta_2)(\partial\eta_2/\partial\Gamma') = 0.$$

D'où

$$\partial\eta_2/\partial\Gamma' = -(\partial G/\partial\Gamma')/(\partial G/\partial\eta_2). \qquad (3.2.85)$$

Utilisons (3.2.84) pour mettre (3.2.85) sous la forme

$$\partial\eta_2/\partial\Gamma' = (\partial f/\partial\Gamma')/(2 - \partial f/\partial\eta_2). \qquad (3.2.86)$$

On voit que, pour $\partial f/\partial\eta_2 = 2$, la dérivée $\partial\eta_2/\partial\Gamma'$ tend vers l'infini. Ceci signifie que la courbe de synchronisme $\eta_2(\Gamma')$ comporte une partie hystérétique due au caractère non univoque de la dépendance de η_2 vis-à-vis de Γ' [15].

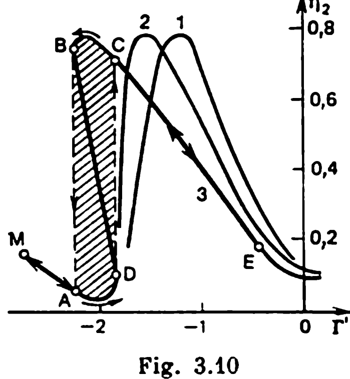


Fig. 3.10

Les calculs effectués sur ordinateur confirment l'existence de la dépendance non univoque $\eta_2(\Gamma')$. Les courbes caractéristiques de $\eta_2(\Gamma')$ calculées pour $\xi(l) = 3$, $\delta'_1 = 0$, $\delta'_2 = 10^{-2}$, $\langle P_1(0)\rangle/P_{cr} = 100$ et différentes valeurs du paramètre Bi (*1*: Bi $= \infty$, *2*: Bi $= 8$, *3*: Bi$=4$) sont représentées sur la fig. 3.10 [15]. On voit que la diminution du paramètre Bi, c'est-à-dire la dégradation du contact thermique, conduit à une *augmentation de la pente* de la branche de gauche de la courbe de synchronisme et que si Bi diminue encore, il apparaît un tronçon d'*hystérésis ADBC* (v. courbe *3*).

Examinons de plus près le comportement du générateur de deuxième harmonique en présence d'hystérésis. Elevons la température

T_0 du thermostat (autrement dit, augmentons Γ') à partir d'un certain point « froid » M (v. figure). Au point D la dérivée $\partial\eta_2/\partial\Gamma'$ devient infiniment grande, et le générateur passe par saut au point C qui se caractérise par la valeur élevée du coefficient de conversion. Une augmentation ultérieure de la température T_0 (du paramètre Γ') conduira au déplacement suivant la ligne CE, c'est-à-dire à une diminution de η_2. Si l'on commence maintenant à refroidir le cristal (à diminuer Γ'), le déplacement le long de la ligne EC n'aura lieu que jusqu'au point B où la dérivée $\partial\eta_2/\partial\Gamma'$ devient de nouveau infiniment grande. Au point B le coefficient de conversion diminue par saut jusqu'à sa valeur correspondant au point A.

Dans la pratique, la largeur de la partie hystérétique (hachurée sur la figure) n'est égale, en température, qu'à quelques dixièmes de degré, de plus, le point B est très proche du point correspondant au maximum de coefficient de conversion. Ceci signifie qu'un thermorégulateur ordinaire qui fixe la température T_0 au voisinage du point B ne peut maintenir le générateur en régime stationnaire avec le maximum de coefficient de conversion. Un thermorégulateur qui règle automatiquement la température T_s au maximum de conversion n'assure lui non plus la stabilité du processus de génération de deuxième harmonique, car le point correspondant au maximum de coefficient de conversion η_2 se confond pratiquement avec le point de décrochage (point B). D'ailleurs, une simple mise en fonctionnement d'un tel régulateur au point M et son passage automatique au point de conversion optimale (sur la figure, $\Gamma'_{opt} = -2$) n'assure le bon fonctionnement du générateur que dans la région des faibles valeurs de η_2, c'est-à-dire entre les points A et D. Afin d'arriver, pour $\Gamma' = -2$, dans le tronçon BC caractérisé par des valeurs élevées de η_2, il est nécessaire de surchauffer d'abord le cristal pour dépasser la partie hystérétique et de le refroidir ensuite jusqu'à la valeur correspondant à $\Gamma' = -2$. Il est plus rationnel d'utiliser des régulateurs dits « à niveau » qui maintiennent automatiquement un niveau déterminé et non extrémal de la puissance du deuxième harmonique.

Sur la fig. 3.10 on a supposé que $\nu_1 \ll \nu_2$. Dans ce cas, l'augmentation de la pente et l'apparition du tronçon hystérétique s'observent sur la branche *de gauche* de la courbe de synchronisme, c'est-à-dire dans la région de « sous-chauffage » du cristal. Lorsque $\nu_1 \gg \nu_2$, des phénomènes analogues peuvent se manifester dans la région de « surchauffage » du cristal (sur la branche *de droite* de la courbe de synchronisme).

Signalons que dans la pratique on a généralement $\nu_1 < \nu_2$. Ceci tient premièrement à ce que la longueur d'onde du deuxième harmonique se situe plus près du bord ultra-violet de la bande d'absorption dans le cristal que la longueur d'onde fondamentale. Deuxièmement, une contribution importante à la valeur de δ_2 peut être apportée par l'absorption non linéaire (à deux photons) (v. § 3.3).

Génération de deuxième harmonique par des impulsions uniques [12], [17]. — Si le rayonnement fondamental représente une impulsion unique puissante dont la durée τ_1 est plus petite que le temps caractéristique d'établissement d'un champ thermique stationnaire ($\tau_1 < 10$ ns), il se produit un échauffement *local* du cristal non linéaire. Les processus de transfert de chaleur d'un point du cristal à un autre sont alors pratiquement négligeables. La température d'un point donné (et donc le désaccord thermique) augmente dans le temps avec l'augmentation de l'énergie absorbée par le cristal. Il en résulte que la condition de synchronisme est troublée de plus en plus pendant la durée de l'impulsion, ce qui

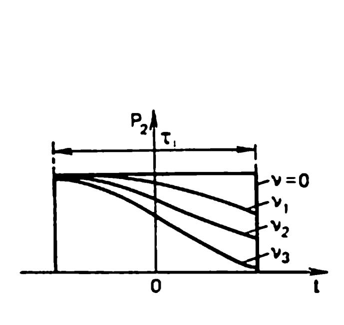


Fig. 3.11

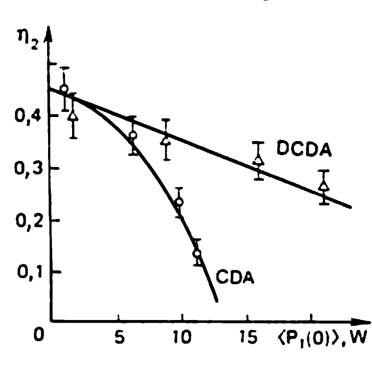


Fig. 3.12

provoque un abaissement de l'impulsion de deuxième harmonique dans l'étape de descente. Ceci est visible sur la fig. 3.11 qui montre l'allure qualitative de l'impulsion de deuxième harmonique pour différentes valeurs de paramètre ν ($\nu_1 < \nu_2 < \nu_3$). L'impulsion d'entrée de rayonnement fondamental avait dans ce cas une forme rectangulaire.

Il est à noter que dans le cas des impulsions uniques puissantes les auto-actions thermiques déterminent la durée *limite* de l'impulsion de rayonnement fondamental. L'augmentation de la durée de l'impulsion au-delà de la valeur limite est sans effet sur la croissance de l'énergie de l'impulsion de deuxième harmonique [17].

Sur l'importance de la prise en compte des auto-actions thermiques. — La prise en compte des auto-actions thermiques présente une très grande importance lors de l'étude de la génération de deuxième harmonique, par exemple dans les cristaux de $LiNbO_3$, CDA, DCDA excités par le rayonnement des lasers à YAG: Nd^{3+} pulsés de grande puissance fonctionnant en régime périodique. Il est évident que le coefficient de conversion η_2 décroît de façon monotone lorsque la valeur moyenne de la puissance d'entrée du rayonnement fondamental $\langle P_1(0)\rangle$ augmente (même dans le cas où pour chaque valeur de $\langle P_1(0)\rangle$ on choisit la température optimale du thermostat). La fig. 3.12 représente les courbes théorique et expérimentale de variation de η_2 en fonction de $\langle P_1(0)\rangle$ pour les cristaux de CDA et de DCDA [16]. On voit que si on prend le coefficient de conversion minimal admissible égal à 10 %, le cristal de CDA ne peut être utilisé que pour $\langle P_1(0)\rangle \leqslant 10$ W. Pour des valeurs plus élevées de

$\langle P_1(0)\rangle$, les auto-actions thermiques provoquent une baisse de η_2 jusqu'à des valeurs inférieures à 10 %. Dans le cristal de DCDA qui est moins absorbant, les auto-actions thermiques se manifestent dans une mesure plus faible; ce cristal peut être utilisé pour des valeurs de $\langle P_1(0)\rangle$ égales à environ 40 W.

La fig. 3.13, *a* représente la courbe de synchronisme pour un cristal de DCDA dans le cas du synchronisme à 90° (dans cette figure

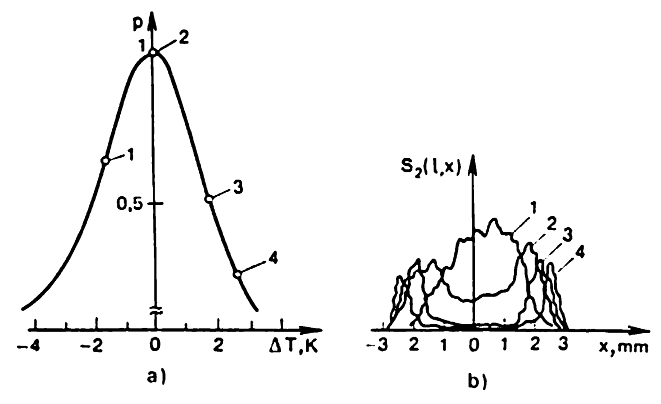


Fig. 3.13

$p = \langle P_2(l)\rangle / \langle P_2(l)\rangle_{max}$). Cette courbe est obtenue pour $\langle P_1(0)\rangle = 20$ W, $\lambda_1 = 1064$ nm, $f = 310$ Hz; les dimensions du cristal: $1 \times 1 \times 4$ cm. La fig. 3.13, *b* montre les répartitions transversales (suivant la coordonnée x) de la densité de puissance de sortie du deuxième harmonique $S_2(l, x)$ correspondant aux différents points de la courbe de synchronisme. Ainsi, au point *1* de la courbe de synchronisme correspond une répartition en cloche de la densité de puissance (région proche), au point *2* (efficacité maximale de la conversion), une structure annulaire du champ de deuxième harmonique.

Pour réduire l'influence nuisible des effets thermiques, il faut diminuer les pertes par absorption dans le cristal non linéaire. A ce propos, l'utilisation des faisceaux « en fente », elliptiques, « annulaires » et d'autres, au lieu des faisceaux traditionnels à symétrie axiale, semble bien prometteuse.

§ 3.3. Certains autres facteurs limitant l'efficacité de la génération de deuxième harmonique

Avec l'apparition des lasers à YAG: Nd^{3+} pulsés à haute fréquence, caractérisés par une haute puissance de crête (dizaines de mégawatts) associée à une valeur élevée (dizaines de watts) de la puissance moyenne de rayonnement, on a mis en évidence certains

facteurs supplémentaires qui limitent l'efficacité de la conversion de l'onde fondamentale en onde du deuxième harmonique [16].

Absorption non linéaire. — Supposons que dans un diélectrique se propagent l'onde de rayonnement fondamental (ayant la densité de puissance S_1) et l'onde du deuxième harmonique (de densité de puissance S_2). Si l'on néglige l'interaction non linéaire des ondes, qui conduit à la conversion du rayonnement à une fréquence en un rayonnement à une autre fréquence, on peut écrire les expressions suivantes pour les dérivées dS_1/dz et dS_2/dz, qui tiennent compte de l'absorption tant linéaire que non linéaire dans le milieu [18], [19]:

$$\begin{aligned} dS_1/dz &= -(\delta_1 + \beta_{11}S_1 + \beta_{12}S_2)\, S_1; \\ dS_2/dz &= -(\delta_2 + \beta_{22}S_2 + \beta_{12}S_1)\, S_2. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Les termes $\delta_1 S_1$ et $\delta_2 S_2$ se rapportent à l'absorption ordinaire (linéaire), alors que les autres termes figurant aux seconds membres des équations (3.3.1) sont relatifs à l'absorption non linéaire due aux transitions à deux photons (absorption à deux photons) [1]. Le terme $\beta_{22}S_2^2$ est lié à l'absorption de deux photons du rayonnement du deuxième harmonique, de plus, il faut que soit réalisée l'inégalité $2\hbar\omega_2 \geqslant E_1$, où E_1 est la largeur de la bande interdite du cristal, $\hbar\omega_2$, l'énergie du photon à la fréquence du deuxième harmonique. Les termes $\beta_{12}S_1S_2$ tiennent compte de l'absorption à deux photons de type mixte lorsque l'un des photons appartient au rayonnement d'onde fondamentale, et l'autre, à celui du deuxième harmonique. Dans ces conditions, il faut que $\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 \geqslant E_1$ (ici $\omega_1 = \omega_2/2$). Enfin, le terme $\beta_{11}S_1^2$ exprime l'absorption à deux photons à la fréquence de rayonnement fondamental (il faut que $2\hbar\omega_1 \geqslant E_1$).

Comme exemple caractéristique, prenons le cristal de niobate de lithium dans lequel l'absorption non linéaire joue, comme le montrent les études, un rôle important [18], [19]. Pour ce cristal $E_1 = 3{,}9$ eV. Si la source de rayonnement d'onde fondamentale est constituée par un laser à YAG: Nd^{3+} ($\hbar\omega_1 = 1{,}16$ eV, $\hbar\omega_2 = 2{,}32$ eV), on a

$$2\hbar\omega_1 < (\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2) < E_1 < 2\hbar\omega_2.$$

Aussi, en examinant l'absorption non linéaire (à deux photons), doit-on se borner à l'absorption de deux photons du deuxième harmonique, c'est-à-dire au terme $\beta_{22}S_2^2$. En effet, les coefficients β_{11} et β_{12} sont dans ce cas inférieurs d'un ordre de grandeur au coefficient β_{22}. Une situation analogue s'observe dans un cristal de niobate de baryum-sodium pompé par le rayonnement du laser à YAG: Nd^{3+}.

---

[1]) Pour les processus à plusieurs photons, voir par exemple § 2.2 de [20].

En tenant compte des remarques faites, remplaçons (3.3.1) par un système d'équations plus simple :

$$dS_1/dz = -\delta_1 S_1;$$

$$dS_2/dz = -(\delta_2 + \beta_{22} S_2)\, S_2. \qquad (3.3.2)$$

La constante β_{22} est appelée coefficient d'absorption non linéaire.

Prise en compte de l'absorption non linéaire lors de l'étude de la génération de deuxième harmonique. — En tenant compte de l'absorption à deux photons à la fréquence du deuxième harmonique, remplaçons δ_2' par $\delta_2' + \gamma_{22} u_2^2$ dans la seconde équation du système (3.2.23). La somme $\delta_2' + \gamma_{22} u_2^2$ est en accord avec la somme $\delta_2 + \beta_{22} S_2^2$ entre parenthèses dans la seconde équation du système (3.3.2) puisque $S_2 \sim u_2^2$. La seconde équation du système (3.2.23) prend ainsi la forme suivante :

$$\partial u_2/\partial \xi = u_1^2 \sin \Psi - \delta_2' u_2 - \gamma_{22} u_2^3 \qquad (3.3.3)$$

(l'équation fait intervenir un terme supplémentaire proportionnel au cube de l'amplitude de deuxième harmonique). Comme

$$\delta_2' = \delta_2/\sigma a_{10}; \quad S_2 = c n_2 a_{10}^2 u_2^2/8\pi,$$

on a par voie de conséquence

$$\gamma_{22} = \beta_{22} c n_2 a_{10}/8\pi\sigma. \qquad (3.3.4)$$

La constante γ_{22} est appelée coefficient réduit d'absorption non linéaire.

Fait significatif, la prise en compte de l'absorption non linéaire exige que l'on prenne en même temps en considération des auto-actions thermiques. Revenons donc à l'équation de la chaleur (3.2.46), dans laquelle il faut remplacer δ_2' par $\delta_2' + \gamma_{22} u_2^2$. L'équation de la chaleur prend alors la forme

$$-\nabla_\rho^2 \Delta k_{\text{at}}' (\rho, \xi) = 8 \frac{\langle P_1(0) \rangle}{P_{\text{cr}}} \left\{ \gamma_{22} u_2^4 (\rho, \xi, 0) + \sum_{i=1}^{2} \delta_i' u_i^2 (\rho, \xi, 0) \right\}. \qquad (3.3.5)$$

En faisant usage de (3.3.3) et (3.3.5), on obtient un système d'équations complet qui décrit la génération de deuxième harmonique en présence tant des auto-actions thermiques que de l'absorption

non linéaire [comparer à (3.2.24)] :

$$
\begin{aligned}
&\partial u_1/\partial\xi = -u_1 u_2 \sin\Psi - \delta_1' u_1 ;\\
&\partial u_2/\partial\xi = u_1^2 \sin\Psi - \delta_2' u_2 - \gamma_{22} u_2^3 ;\\
&\partial\Psi/\partial\xi = 2(\Delta k_0' + \Delta k_{at}') + (u_1^2 - 2u_2^2)\cos\Psi/u_2 ;\\
&-\nabla_\rho^2 \Delta k_{at}' = 8\,\frac{\langle P_1(0)\rangle}{P_{cr}} \times\\
&\qquad\times\left[\gamma_{22} u_2^4(\rho,\ \xi;\ 0) + \sum_{i=1}^{2} \delta_i' u_i^2(\rho,\ \xi;\ 0)\right].
\end{aligned}
\qquad (3.3.6)
$$

En pratique, il est plus important de prendre en considération l'absorption non linéaire dans l'équation de la chaleur que dans celle des amplitudes. L'apparition du terme $-\gamma_{22}u_2^3$ dans la seconde équation du système (3.3.6) n'introduit qu'une correction quantitative relativement petite, alors que le terme $\gamma_{22}u_2^4$ entre crochets de l'équa-

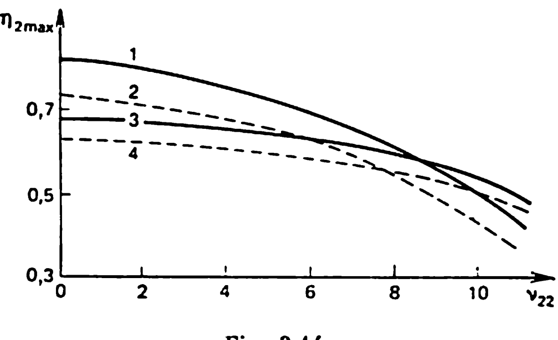


Fig. 3.14

tion de la chaleur (3.3.5) joue en règle générale un rôle de principe. Pour un cristal de niobate de lithium, par exemple, pour $S_{10} \approx$ $\approx 10^8$ W/cm² on a l'inégalité

$$\gamma_{22} u_2^4 \gg \sum_{i=1}^{2} \delta_i' u_i^2, \qquad (3.3.7)$$

si bien que l'équation de la chaleur peut être représentée dans ce cas sous la forme

$$-\Delta_\rho^2 \Delta k_{at}' = 8\,\langle P_1(0)\rangle\,\gamma_{22} u_2^4(\rho,\ \xi;\ 0)/P_{cr}. \qquad (3.3.8)$$

Rappelons que les coefficients d'absorption non linéaire se caractérisent par une forte dispersion : $\gamma_{22} \gg \gamma_{11}$. Par conséquent, lorsque l'inégalité (3.3.7) est réalisée, la courbe de synchronisme peut com-

porter (dans le cas du contact thermique non idéal) un tronçon hystérétique.

La fig. 3.14 représente les courbes de variation du coefficient de conversion maximal η_{2max} en fonction de $\nu_{22} = 2\gamma_{22} \langle P_1(0) \rangle / P_{cr}$. Le coefficient η_{2max} est déterminé dans les conditions de désaccord optimal. Pour chacune des courbes de $\eta_{2max}(\nu_{22})$ le paramètre γ_{22} est fixé; donc, la figure montre en fait les courbes de variation de η_{2max} en fonction de $\langle P_1(0) \rangle$. Les courbes sont obtenues pour les cas suivants: *1*, $\gamma_{22} = 0{,}01$, $\xi(l) = 3$; *2*, $\gamma_{22} = 0{,}1$, $\xi(l) = 3$; *3*, $\gamma_{22} = 0{,}01$, $\xi(l) = 2$; *4*, $\gamma_{22} = 0{,}1$, $\xi(l) = 2$.

Génération de porteurs de charges libres. — L'absorption non linéaire s'accompagne du passage des électrons de la bande de valence du cristal dans la bande de conduction, c'est-à-dire entraîne la génération de porteurs libres. La concentration stationnaire des porteurs libres se trouve proportionnelle au coefficient d'absorption non linéaire β_{22} et au carré de la densité de puissance du deuxième harmonique. L'effet de génération de porteurs libres est à prendre en considération lors de l'examen du processus de conversion en deuxième harmonique dans les cristaux du type de niobate de lithium et de niobate de baryum-sodium. Comme le montrent des évaluations, on peut dans ce cas négliger l'absorption du rayonnement fondamental et celle du deuxième harmonique aux porteurs libres, mais il faut tenir compte, dans l'équation pour la phase généralisée, du désaccord supplémentaire $\Delta k_{gpl} \sim \beta_{22} S_2^2$.

Ainsi, la prise en compte de la génération de porteurs libres se ramène au remplacement, dans la troisième équation du système (3.3.6), de $(\Delta k_0' + \Delta k_{at}')$ par $(\Delta k_0' + \Delta k_{at}' + \Delta k_{gpl}')$. Conformément à la théorie de l'effet de génération de porteurs libres [21],

$$\Delta k_{gpl}' = -3qu_2^4, \tag{3.3.9}$$

où

$$q = \pi e^2 \beta_{22} \tau (m_e^{-1} + m_h^{-1}) S_1^2 / 2cn\hbar\omega_2^2 \sigma a_{10}. \tag{3.3.10}$$

Ici, e est la charge de l'électron; τ, la durée de vie des porteurs libres; m_e et m_h sont respectivement les masses effectives de l'électron et du trou.

Photoréfraction (effet photoréfractif). — En 1966 on a découvert l'influence d'un éclairement intense sur la biréfringence dans les corps ferro-électriques [21]. Le passage d'un faisceau lumineux intense à travers un cristal ferro-électrique provoque (dans les limites du volume occupé par le faisceau) une variation réversible de la valeur de la biréfringence $B = n_e - n_0$, due essentiellement à la variation de l'indice de réfraction n_e de l'onde extraordinaire, atteignant 10^{-5} à 10^{-3} (pour le cristal de $LiNbO_3$). Cet effet a reçu le nom de *photoréfraction* (*effet photoréfractif*). On l'appelle encore effet d'*inhomogénéité optique induite* (de l'indice de réfraction) ou effet de *distorsion optique* (optical damage en anglais).

Sans procéder à une analyse quelque peu détaillée de la physique suffisamment complexe de cet effet, bornons-nous à examiner son modèle physique proposé historiquement le premier. Suivant ce modèle, l'éclairement d'un corps ferro-électrique fait apparaître des porteurs excités à certains niveaux qui se déplacent sous l'action d'un champ

interne toujours présent dans un ferro-électrique, vers la périphérie du faisceau lumineux où ils sont captés par des niveaux profonds. La séparation des charges dans l'espace provoque l'apparition d'un champ localisé et, comme conséquence, une variation localisée de l'indice de réfraction par suite de l'effet électro-optique Pockels qui se manifeste dans ce champ.

L'influence de l'effet de photoréfraction sur la génération de deuxième harmonique sera examinée sur l'exemple de cristal de $LiNbO_3$. Comme source de rayonnement fondamental on utilise le laser à YAG : Nd^{3+} ainsi que le laser à argon. La photoréfraction ne

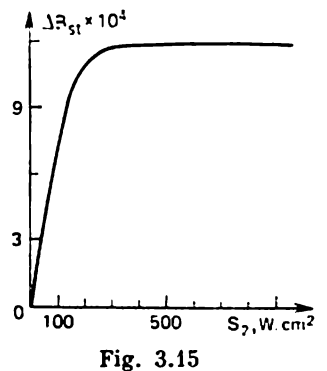


Fig. 3.15

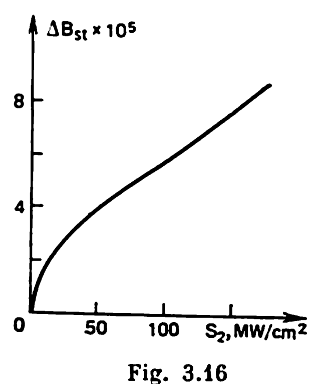


Fig. 3.16

se produit que sur la fréquence du deuxième harmonique. La dépendance de la variation stationnaire (établie [1])) de la biréfringence ΔB_{st} vis-à-vis de la densité de puissance du deuxième harmonique est qualitativement différente pour les lasers continus et les lasers de haute fréquence.

Pour un laser à argon *continu*, cette dépendance est représentée sur la fig. 3.15. Pour $S_2 \leqslant 100$ W/cm² la dépendance est *linéaire* ($\Delta B_{st} \sim S_2$) ; pour des valeurs suffisamment élevées de S_2 la fonction ΔB_{st} (S_2) passe à la saturation. Pour $S_2 \approx 500$ W/cm² on a $\Delta B_{st} \approx 10^{-3}$.

Pour un laser à YAG : Nd^{3+} *pulsé* fonctionnant en régime déclenché, cette dépendance est représentée sur la fig. 3.16 [22], où S_2 est la puissance *de crête* du deuxième harmonique. Remarquons que la fréquence de répétition des impulsions (et donc la valeur moyenne de la densité de puissance) est dans ce cas sans importance. Pour $S_2 \leqslant 100$ MW/cm², ΔB_{st} varie comme la *racine carrée de* S_2:

$$\Delta B_{st} = \Phi \sqrt{S_2}, \quad \text{où} \quad \Phi = 0{,}58 \cdot 10^{-5}\ \text{cm/MW}^{1/2}. \qquad (3.3.11)$$

[1]) Le temps d'établissement dépend de S_2. Ainsi, en régime d'impulsions ce temps est égal à 2 mn pour $S_2 \approx 20$ MW/cm² et à 20 s pour $S_2 \approx 100$ MW/cm².

Pour des valeurs plus élevées de S_2, la fonction ΔB_{st} (S_2) devient *linéaire*. Conformément à (3.3.11), pour $S_2 \approx 100$ MW/cm² est réalisée $\Delta B_{st} \approx 10^{-4}$.

Remarquons que les courbes des fig. 3.15 et 3.16 sont empiriques. La théorie de l'effet de photoréfraction ne permet pas encore de calculer ces fonctions.

Désaccord d'onde dû à la photoréfraction. — La prise en compte de la photoréfraction lors de l'étude de la génération de deuxième harmonique se ramène (de même que dans le cas des auto-acides thermiques ou dans celui de la génération de porteurs libres) à faire apparaître dans l'équation de la phase généralisée un désaccord *supplémentaire* Δk_{phr}. Ce désaccord s'exprime par l'intermédiaire de ΔB_{st} à l'aide de la formule (3.1.2):

$$\Delta k_{phr} = 4\pi \Delta B_{st}/\lambda_1. \tag{3.3.12}$$

Supposons que l'on utilise un laser pulsé à fonctionnement périodique et que $S_2 < 100$ MW/cm². En tenant compte que dans ce cas est applicable la relation (3.3.11), récrivons (3.3.12) sous la forme

$$\Delta k_{phr} = 4\pi\Phi \sqrt{S_2}/\lambda_1 \tag{3.3.13}$$

ou encore

$$\Delta k_{phr} = \varphi a_2 \tag{3.3.14}$$

avec

$$\varphi = \Phi \sqrt{2\pi c n_2}/\lambda_1. \tag{3.3.15}$$

Portrait de phase de la génération de deuxième harmonique en présence de la photoréfraction; régime optimal. — Partons du résultat (2.4.5) qui prend, en présence de la photoréfraction, la forme suivante:

$$\cos \Psi = \left[C' - \frac{(\Delta k + \varphi a_2)\, a_2^2}{2\sigma} \right] \Big/ a_2 (U^2 - a_2^2). \tag{3.3.16}$$

En utilisant le résultat (2.4.5), on admet toute une série d'hypothèses simplificatrices dans le cadre desquelles sera examiné le problème: on adopte le modèle des ondes planes, on admet l'approximation quasi statique, on néglige les effets d'ouverture, les auto-actions thermiques, l'absorption non linéaire, etc. La répartition de l'intensité du rayonnement d'onde fondamentale à l'entrée du cristal est supposée rectangulaire tant dans le temps que dans l'espace. Une telle simplification rend le modèle mathématique inadéquat à la situation réelle. Néanmoins elle permet de mettre en évidence des particularités qualitatives importantes qui caractérisent le processus de génération de deuxième harmonique dans les conditions de photoréfraction.

En faisant usage de (2.4.6), mettons (3.3.16) sous la forme

$$\cos \Psi = [C_2 - (\Delta_1 + \alpha v_2) v_2^2]/v_2 (1 - v_2^2), \qquad (3.3.17)$$

avec

$$v_2 = a_2/U \ ; \ \Delta_1 = \Delta k/2\sigma U \ ; \ \alpha = \varphi/2\sigma \ ; \ C_2 = C'/U^3. \qquad (3.3.18)$$

La relation (3.3.17) est analogue à (2.4.7). Tout comme (2.4.7), l'équation (3.3.17) détermine une famille de trajectoires de phase (le

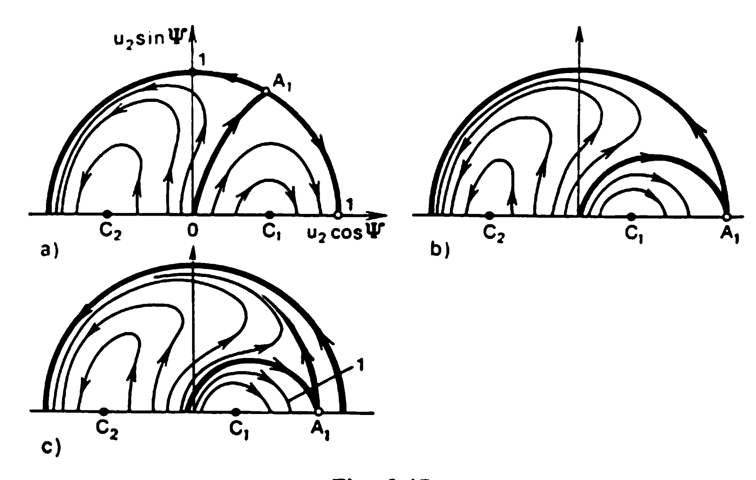


Fig. 3.17

portrait de phase) du processus de conversion considéré dans le plan de phase délimité par les axes de coordonnées $v_2 \cos \Psi$ et $v_2 \sin \Psi$.

La fig. 3.17 représente les portraits de phase du processus obtenus à partir de (3.3.17) pour un *régime* dit *optimal* [22], c'est-à-dire à condition que

$$\Delta_1 = -\alpha. \qquad (3.3.19)$$

On a considéré les cas: *a*) $\Delta_1 = -1$, $\alpha = 1$; *b*) $\Delta_1 = -2$, $\alpha = 2$; *c*) $\Delta_1 = -2{,}5$, $\alpha = 2{,}5$. De même que sur les fig. 2.8 et 2.11, les lignes en traits forts désignent la séparation, A_1 est le point selle de la séparatrice, $C_{1,2}$ sont les centres de phase.

Le régime décrit par la condition (3.3.19) est dit optimal parce que dans ce cas pour $\alpha \leqslant 2$ la séparatrice passe par le point O. Par conséquent, lorsque l'amplitude du deuxième harmonique à l'entrée du cristal est nulle, le point figuratif se déplacera dans les cas *a* et *b* de la fig. 3.17 suivant la séparatrice du point O vers le point selle A_1, si bien que sur une longueur suffisamment grande du cristal non linéaire la conversion en deuxième harmonique sera pratiquement égale à 100 %. A ces cas de déplacement du point figuratif correspondent les courbes *monotones* η_2 (ξ) représentées sur la fig. 3.18 et désignées respectivement par *a* et *b*. Dans le cas *c* de la fig. 3.17,

le point figuratif suivra, à partir de O, la trajectoire de phase fermée désignée par le chiffre 1. A ce déplacement répond la courbe c de la fig. 3.18, qui a le caractère de battements spatiaux. Aux fins de comparaison, on a montré sur la fig. 3.18, en traits interrompus, la courbe de variation de η_2 en fonction de ξ pour $\Delta_1 = \alpha = 0$ (dans ce cas le point figuratif se déplace suivant le tronçon OA_1 de la séparatrice montrée sur la fig. 2.8).

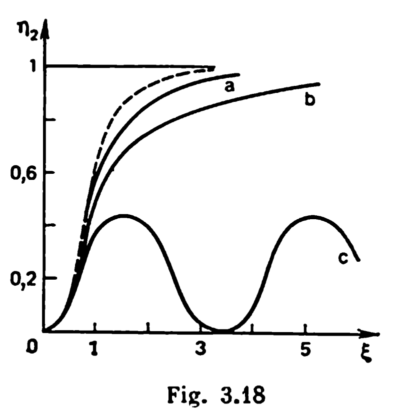


Fig. 3.18

Ainsi, pour $\alpha \leqslant 2$ on peut *compenser* le désaccord dû à la photoréfraction. A cet effet, il est nécessaire de régler le cristal spécialement hors de synchronisme en assurant un désaccord de phase optimal $\Delta_{1\,\mathrm{opt}} = -\alpha$. La courbe de $\eta_2(\xi)$ aura alors pratiquement la même forme qu'en l'absence de la photoréfraction lorsque la condition de synchronisme est exactement satisfaite (comparer les courbes a et b à la courbe en traits interrompus de la fig. 3.18). Si $\alpha > 2$, cette compensation est impossible à réaliser; dans ce cas, la photoréfraction provoque une modification *qualitative* du processus de conversion (v. courbe c de la fig. 3.18).

A partir de (3.3.17) on peut obtenir, en appliquant la condition (3.3.19), les expressions suivantes pour $\eta_2(\xi)$ [22]:

pour $\alpha < 2$

$$\eta_2(\xi) = \left[\frac{\mathrm{th}(p\xi)(\mathrm{th}(p\xi)+p)}{p^2+p\,\mathrm{th}(p\xi)-(p^2-1)\,\mathrm{th}^2(p\xi)}\right]^2; \qquad (3.3.20)$$

pour $\alpha > 2$

$$\eta_2(\xi) = \left[\frac{\mathrm{tg}(q\xi)(\mathrm{tg}(\xi q)+q)}{q^2+q\,\mathrm{tg}(q\xi)+(q^2+1)\,\mathrm{tg}^2(q\xi)}\right]^2, \qquad (3.3.21)$$

où $p = [1-(\alpha/2)^2]^{1/2}$; $q = [(\alpha/2)^2-1]^{1/2}$.

Il résulte de (3.3.20) que $\eta_2 \to 1$ lorsque $\xi \to \infty$. L'efficacité maximale de conversion qu'on peut atteindre pour $\alpha > 2$ s'exprime par

$$\eta_{2\,\max} = [(\alpha+2)/(\alpha^2+\alpha-2)]^2. \qquad (3.3.22)$$

§ 3.4. Génération de deuxième harmonique au régime non stationnaire

Comme il a été dit au § 2.6, lorsqu'on utilise des impulsions laser *ultracourtes* de durée inférieure à 10^{-11} s, l'approximation quasi statique devient inapplicable [1]). Dans un tel cas il faut considérer le ré-

[1]) Les impulsions de durée inférieure à 10^{-11} s sont produites par des lasers à modes longitudinaux synchronisés. Voir par exemple [7], [23].

gime *non stationnaire* de génération de deuxième harmonique. Le régime non stationnaire se caractérise par deux effets spécifiques: le *retard de groupe* des impulsions lumineuses interagissantes et le *flou de dispersion* des impulsions [1]). La nature physique de ces effets a été examinée dans les grandes lignes au § 2.6.

Retard de groupe des impulsions; synchronisme de groupe. — La dépendance de la vitesse de groupe vis-à-vis de la fréquence a pour

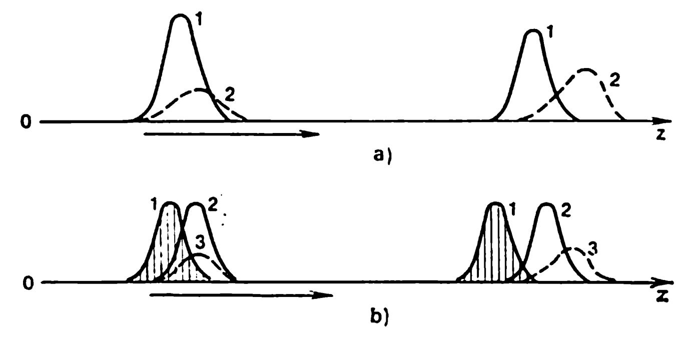


Fig. 3.19

effet que l'impulsion du deuxième harmonique se décale par rapport à l'impulsion de fréquence fondamentale au cours de la propagation dans un cristal non linéaire (effet de retard de groupe des impulsions).

La fig. 3.19, *a* montre schématiquement pour l'interaction *ooe* comment varient la forme et la position relative des impulsions de fréquence fondamentale (impulsion *1*) et du deuxième harmonique (impulsion *2*) à mesure qu'elles se propagent le long de l'axe des *z*. Les vitesses de groupe des impulsions vérifient ici l'inégalité $u_0(\omega) < u_e(2\omega)$. Notons que dans l'interaction *ooe*, le deuxième harmonique est généré à l'intérieur de l'impulsion de rayonnement d'onde fondamentale pendant *toute la durée* de passage de l'impulsion à travers le cristal. De ce fait, l'impulsion de sortie du deuxième harmonique se trouve élargie de façon asymétrique.

Lors de l'interaction *oee*, la situation est qualitativement différente (v. fig. 3.19, *b*). Par suite de la différence entre les vitesses de groupe des impulsions ordinaire et extraordinaire de fréquence fondamentale l'impulsion ordinaire (impulsion *1*) commence à se décaler par rapport à l'impulsion extraordinaire (impulsion *2*) au fur et à mesure de la propagation dans le cristal. Ces deux impulsions sont de fréquence fondamentale ; aussi le décalage indiqué provoque-t-il la *cessation* de la conversion en deuxième harmonique. Il en résulte que

---

[1]) Pour la génération de deuxième harmonique au régime non stationnaire, voir par exemple [1], [24], [25].

l'énergie et la puissance de crête de l'impulsion de sortie du deuxième harmonique sont ici plus faibles que lors de l'interaction *ooe*. La situation représentée sur la fig. 3.19, *b* correspond à la relation suivant des vitesses de groupe des impulsions interagissantes: $u_0(\omega) < u_e(\omega) < u_e(2\omega)$.

Il y a de l'analogie entre l'effet de retard de groupe des impulsions et le décalage spatial de l'énergie d'un faisceau lumineux extraordinaire par rapport au faisceau ordinaire (effet d'ouverture de diaphragme). Dans les deux cas il se produit un décalage dans l'espace des rayonnements interagissants et, comme conséquence, une diminution de l'efficacité de la conversion. A noter que la diminution de l'efficacité de la conversion est plus grande dans le cas de l'interaction *oee* (par rapport à l'interaction *ooe*); comparer la fig. 3.19, *a* à la fig. 2.28, et la fig. 3.19, *b* à la fig. 2.29. Cette analogie est une des manifestations de l'*analogie spatio-temporelle* qui sera examinée au § 3.6.

Introduisons pour l'étude de l'interaction *ooe* les désignations suivantes: u_1, τ_1, $l_1 = c\tau_1/n_1$ (la vitesse de groupe, la durée effective, la longueur effective de l'impulsion de rayonnement d'onde fondamentale); u_2, τ_2, $l_2 = c\tau_2/n_2$ (les mêmes grandeurs pour l'impulsion du deuxième harmonique). La quantité

$$\nu = (1/u_1) - (1/u_2) \qquad (3.4.1)$$

est appelée désaccord de vitesse de groupe des impulsions. Les conditions sous lesquelles se manifeste l'effet de retard de groupe s'expriment par

$$l_1 < l, \quad l_2 < l; \qquad (3.4.2)$$

$$\nu \neq 0 \qquad (3.4.3)$$

La condition (3.4.2) signifie que les longueurs des impulsions doivent être inférieures à la longueur l du cristal non linéaire. Cette condition est nécessaire mais non suffisante. Elle doit être considérée en association avec la condition (3.4.3) qui reflète la différence entre les vitesses de groupe des impulsions.

Il se peut que

$$u_1 = u_2. \qquad (3.4.4)$$

On dit dans ce cas qu'il y a *synchronisme de groupe*. (Ne pas confondre avec le synchronisme d'onde (de phase) étudié jusqu'ici!). La condition de synchronisme de groupe ne peut être réalisée que pour une certaine fréquence bien déterminée ω du rayonnement ordinaire (et corrélativement, pour la fréquence 2ω du rayonnement extraordinaire). Lorsque (3.4.4) est vérifiée, les conditions (3.4.2) ne conduisent évidemment pas au retard des impulsions [1]).

[1]) Pour plus de détail sur le synchronisme de groupe, voir par exemple [26].

Pour évaluer l'influence que l'effet considéré a sur la génération de deuxième harmonique on introduit le temps caractéristique de retard

$$\tau_\nu = \nu l \tag{3.4.5}$$

et la *longueur caractéristique de la dispersion* des vitesses de groupe (on l'appelle encore *longueur d'interaction quasi statique*)

$$L_\nu = \tau_1/\nu. \tag{3.4.6}$$

La quantité τ_ν détermine l'intervalle de temps qui sépare, à la sortie du cristal, les impulsions caractérisées par un désaccord de groupe ν. La longueur d'interaction quasi statique est la longueur sur laquelle les impulsions se décalent de τ_1 dans le temps. L'analogue spatial de la longueur quasi statique est la longueur d'ouverture (v. § 2.7). La génération de deuxième harmonique est à étudier comme un processus non stationnaire si

$$\tau_1 < \tau_\nu \text{ ou encore } l > L_\nu. \tag{3.4.7}$$

Pour $\lambda_1 = 1{,}06$ µm et $\tau_1 = 2\cdot 10^{-12}$ s on a $L_\nu = 15$ cm pour le cristal de KDP et $L_\nu = 1$ cm pour le cristal de $LiNbO_3$. Il en résulte que dans le cristal de KDP le retard de groupe peut être négligé vu que les longueurs des cristaux utilisés en pratique n'excèdent en général pas 5 cm, Dans le cristal de $LiNbO_3$, par contre, on doit tenir compte de cet effet.

Effet de flou de dispersion des impulsions. — Du fait que les différentes composantes fréquentielles (composantes de Fourier) de l'impulsion se propagent dans un milieu dispersif avec des vitesses différentes, l'impulsion subit une déformation (devient floue [1])) au cours de son passage dans le cristal. C'est là que réside le flou de dispersion. Un analogue spatial de cet effet est la diffraction des faisceaux d'ouverture finie. Les calculs montrent que le flou de dispersion commence à jouer un certain rôle pour des durées des impulsions de l'ordre de 10^{-13} s et moins.

Pour évaluer l'influence que cet effet peut avoir sur la génération de deuxième harmonique, on introduit la *longueur de flou de dispersion* [v. (2.6.6)]

$$L_{\text{dis}} = \tau_1^2/2\,\frac{d^2k}{d\omega^2} \tag{3.4.8}$$

et le *temps caractéristique de flou de dispersion*

$$\tau_{\text{dis}} = [2l\,d^2k/d\omega^2]^2. \tag{3.4.9}$$

Cet effet est à prendre en compte si

$$\tau_1 < \tau_{\text{dis}} \text{ ou encore } l > L_{\text{dis}}. \tag{3.4.10}$$

---

[1]) Une compression de l'impulsion lumineuse est également possible.

En utilisant une valeur caractéristique de $d^2k/d\omega^2 \approx 10^{-27}$ s²/cm, on obtient $L_{\mathrm{dis}} = 5$ m pour $\tau_1 = 10^{-12}$ s et $L_{\mathrm{dis}} \approx 5$ cm pour $\tau_1 = 10^{-13}$ s. Ainsi, pour des lasers pulsés émettant des impulsions picoseconde (et à plus forte raison pour des impulsions plus longues) le flou de dispersion peut être négligé. Cet effet ne devient appréciable que pour $\tau_1 \lesssim 10^{-13}$ s. De ce fait, dans ce qui suit, en étudiant la génération non stationnaire de deuxième harmonique, nous ne tiendrons compte que de l'effet de retard de groupe des impulsions.

Equations tronquées. — Nous partirons du système d'équations tronquées (2.2.22). Ceci signifie que nous allons considérer un synchronisme *ooe* scalaire, utiliser l'approximation des ondes planes et négliger tant la biréfringence que la diffraction. Pour tenir compte de l'effet de retard de groupe, il faut considérer les amplitudes du champ comme des fonctions non seulement de la coordonnée spatiale longitudinale mais également du temps et introduire, à cet effet, le terme $u_1^{-1}\partial A_1/\partial t$ au premier membre de la première équation du système (2.2.22) et le terme $u_2^{-1}\partial A_2/\partial t$ au premier membre de la seconde équation. Ceci nous conduit au système suivant d'équations tronquées :

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z} A_1(z,\ t) + \frac{1}{u_1}\frac{\partial}{\partial t} A_1(z,\ t) + \delta_1 A_1 = -i\sigma_1 A_1^* A_2 e^{-i\Delta kz};\\ &\frac{\partial}{\partial z} A_2(z,\ t) + \frac{1}{u_2}\frac{\partial}{\partial t} A_2(z,\ t) + \delta_2 A_2 = -i\sigma_2 A_1^2 e^{i\Delta kz}. \end{aligned}} \qquad (3.4.11)$$

Proposons-nous d'examiner la génération non stationnaire de deuxième harmonique à l'approximation du *champ constant* du rayonnement fondamental ; ce faisant, posons $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Le système (3.4.11) prend dans ce cas la forme suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial A_1/\partial z + u_1^{-1}\,\partial A_1/\partial t = 0\ ;\\ &\partial A_2/\partial z + u_2^{-1}\,\partial A_2/\partial t = -i\sigma_2 A_1^2 \exp(i\Delta kz). \end{aligned}} \qquad (3.4.12)$$

La solution de la première équation du système (3.4.12) est une certaine fonction $A\ (\mu)$, où

$$\mu = t - z/u_1 \qquad (3.4.13)$$

est une variable appelée *temps local*. Introduisons $A_1\ (\mu)$ dans la seconde équation (3.4.12) et passons des variables z, t aux variables z, μ. En effectuant ce passage, on doit avoir en vue que

$$\frac{\partial A_2(z,\ t)}{\partial z} = \frac{\partial A_2(z,\ \mu)}{\partial z} + \frac{\partial A_2(z,\ \mu)}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial z} = \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{1}{u_1}\frac{\partial A_2}{\partial \mu}\ ;$$

$$\frac{\partial A_2(z,\ t)}{\partial t} = \frac{\partial A_2(z,\ \mu)}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial A_2}{\partial \mu}.$$

En utilisant (3.4.1), on obtient finalement l'équation différentielle suivante pour $A_2(z, \mu)$:

$$\boxed{\partial A_2/\partial z - \nu \partial A_2/\partial \mu = -i\sigma_2 A_1^2(\mu) \exp(i\Delta kz).} \quad (3.4.14)$$

Comme le montre l'équation (3.4.14), c'est précisément la différence entre les vitesses de groupe u_1 et u_2 (c'est-à-dire $\nu \neq 0$) qui prédétermine le caractère non stationnaire du processus de conversion en deuxième harmonique. Si $\nu = 0$, l'équation (3.4.14) se réduit en fait à la seconde équation du système (2.6.11). En d'autres termes, dans le cas considéré c'est l'approximation *quasi statique* qui est applicable (en association avec l'approximation du champ constant du rayonnement fondamental).

Equation différentielle pour l'amplitude du spectre du deuxième harmonique. — Pour examiner la génération non stationnaire de deuxième harmonique, on utilise généralement une approche *spectrale*: au lieu de l'équation différentielle pour les *amplitudes du champ* on résout une équation correspondante pour les *amplitudes du spectre* et ensuite on trouve l'amplitude de champ du deuxième harmonique à partir de l'amplitude de spectre. L'analyse de la conversion en deuxième harmonique, basée sur les spectres de fréquences, permet de mieux mettre en évidence la physique de ce processus. Les impulsions ultracourtes se caractérisent par un spectre de fréquences relativement large. Rappelons à ce propos que la largeur de spectre $\Delta\omega$ est liée à la durée τ de l'impulsion par la relation $\Delta\omega \gtrsim 1/\tau$.

En appliquant l'approche spectrale, représentons l'amplitude du champ du deuxième harmonique par l'intégrale de Fourier

$$A_2(z, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(z, \Omega) \exp(i\Omega\mu)\, d\Omega. \quad (3.4.15)$$

Ici, $\Phi_2(z, \Omega)$ est l'*amplitude du spectre* du deuxième harmonique ($|\Phi_2(z, \Omega)|^2$ étant le *spectre*), $\Omega = \omega - 2\omega_1$, où ω_1 est la fréquence centrale du rayonnement d'onde fondamentale. De façon analogue, on peut écrire pour l'amplitude $A_1(\mu)$

$$A_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\xi) \exp(i\xi\mu)\, d\xi, \quad (3.4.16)$$

où $\xi = \omega' - \omega_1$ (de même que ω, la variable ω' est la fréquence courante). Introduisons (3.4.15) et (3.4.16) dans (3.4.14), il vient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - i\nu\Omega\Phi_2\right) \exp(i\Omega\mu)\, d\Omega =$$

$$= -i\sigma_2 e^{i\Delta kz} \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\xi)\, \Phi_1(\xi')\, e^{i(\xi+\xi')\mu}\, d\xi\, d\xi' \qquad (3.4.17)$$

(ici $\xi' = \omega'' - \omega_1$). Vu que par suite d'une grande largeur des spectres il se produit, en plus de la duplication de la fréquence, encore l'addition des fréquences, nous pouvons écrire $\omega' + \omega'' = \omega$ et, par conséquent,

$$\xi' = \Omega - \xi. \qquad (3.4.18)$$

En faisant usage de (3.4.18), récrivons (3.4.17) sous la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - i\nu\Omega\Phi_2\right) e^{i\Omega\mu}\, d\Omega =$$

$$= -i\sigma_2 e^{i\Delta kz} \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\xi)\, \Phi_1(\Omega - \xi)\, e^{i\Omega\mu}\, d\xi\, d\Omega \qquad (3.4.19)$$

(lors de l'intégration sur ξ' la valeur de ξ peut être considérée comme constante si bien que $d\xi' = d\Omega$). Il résulte de (3.4.19) que

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - i\nu\Omega\Phi_2 = -i\sigma_2 e^{-i\Delta kz} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\xi)\, \Phi_1(\Omega - \xi)\, d\xi. \qquad (3.4.20)$$

En introduisant la fonction

$$A_2(z, \Omega) = \Phi_2(z, \Omega) \exp(-i\nu\Omega z) \qquad (3.4.21)$$

et le *désaccord généralisé*

$$\varphi = \Delta k - \nu\Omega, \qquad (3.4.22)$$

mettons (3.4.20) sous la forme

$$\boxed{\frac{\partial A_2}{\partial z} = -i\sigma_2 e^{i\varphi z} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\xi)\, \Phi_1(\Omega - \xi)\, d\xi.} \qquad (3.4.23)$$

Ici et dans ce qui suit, il faut avoir en vue que le désaccord Δk est considéré pour la fréquence centrale ω_1 du spectre de rayonnement fondamental.

Impulsion de forme gaussienne de rayonnement d'onde fondamentale. Spectre de deuxième harmonique. — Supposons que l'impulsion de rayonnement fondamental présente une *forme gaussienne*:

$$A_1(\mu) = A_0 \exp(-\mu^2/\tau_1^2). \tag{3.4.24}$$

Dans ce cas on obtient [utilisant (3.1.21)]

$$\Phi_1(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\mu) e^{-i\xi\mu} d\mu = \frac{A_0\tau_1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2\tau_1^2}{4}\right). \tag{3.4.25}$$

En introduisant (3.4.25) dans (3.4.23) et en introduisant la désignation

$$M = \sigma_2 A_0^2 \tau_1^2 / 4\pi, \tag{3.4.26}$$

on trouve [en se servant de nouveau de (3.1.21)]

$$\partial A_2/\partial z = -iM\sqrt{2\pi} \exp(i\varphi z) \exp(-\Omega^2\tau_1^2/8)/\tau_1. \tag{3.4.27}$$

Intégrons (3.4.27) sur z de zéro à l, il vient

$$A_2(l, \Omega) = -M\sqrt{2\pi} \exp(-\Omega^2\tau_1^2/8) [\exp(i\varphi l) - 1]/\tau_1\varphi. \tag{3.4.28}$$

En faisant usage de (3.4.21) et de la relation

$$[\exp(i\varphi l) - 1]/\varphi = \exp(i\varphi l/2) [\exp(i\varphi l/2) - \exp(-i\varphi l/2)]/\varphi =$$
$$= il \exp(i\varphi l/2) \operatorname{sinc}(\varphi l/2), \tag{3.4.29}$$

on obtient à partir de (3.4.28) l'expression suivante pour l'*amplitude du spectre* de l'impulsion de deuxième harmonique:

$$\Phi_2(l, \Omega) = -iMl\sqrt{2\pi} \exp(-\Omega^2\tau_1^2/8 + i\nu\Omega l) \times$$
$$\times \exp(i\varphi l/2) \operatorname{sinc}(\varphi l/2)/\tau_1. \tag{3.4.30}$$

Ainsi, le spectre de deuxième harmonique à la sortie du cristal peut être représenté sous la forme suivante [en tenant compte de (3.4.26) et (3.4.22)]:

$$|\Phi_2(l, \Omega)|^2 = \frac{(\sigma_2 A_0^2 \tau_1 l)^2}{8\pi} \exp\left(-\frac{\Omega^2\tau_1^2}{4}\right) \times$$
$$\times \operatorname{sinc}^2[(\Delta k - \nu\Omega) l/2]. \tag{3.4.31}$$

La fig. 3.20 représente, aux fins de comparaison, les fonctions $\exp(-\Omega^2\tau_1^2/4)$ (courbe *1*), $\operatorname{sinc}^2[(\Delta k - \nu\Omega) l/2]$ (courbe *2*) et $8\pi|\Phi_2|^2/(\sigma_2 A_0^2 \tau_1 l)^2$ (courbe *3*). On voit que lors de la conversion en deuxième harmonique le spectre de rayonnement fondamental [v. (3.4.25)] cesse d'être symétrique; le maximum de spectre *se déplace* sur l'axe des fréquences. Pour évaluer ce déplacement, uti-

lisons la relation approchée

$$\operatorname{sinc}^2(\varphi l/2) \approx \exp[-\alpha(\varphi l/2)^2], \qquad (3.4.32)$$

où $\alpha = 0{,}36$. En se servant de (3.4.32), on perd les maximums laté-

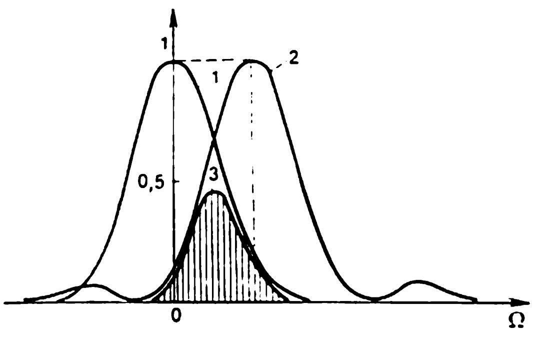


Fig. 3.20

raux de la fonction sinc (x), mais dans ce cas cette perte est sans importance. Avec (3.4.32), l'expression (3.4.31) donne

$$|\Phi_2(l, \Omega)|^2 \sim \exp[-\Omega^2\tau_1^2/4 - \alpha(\Delta k - \nu\Omega)^2 l^2/4]. \qquad (3.4.33)$$

En dérivant (3.4.33) par rapport à Ω et en annulant la dérivée, on trouve la fréquence Ω_{max} correspondant au maximum de spectre :

$$\Omega_{max} = \omega_{max} - 2\omega_1 = \alpha l^2 \nu \Delta k/(\tau_1^2 + \alpha l^2 \nu^2). \qquad (3.4.34)$$

Ainsi, pour la fréquence au centre de la raie spectrale du deuxième harmonique on obtient le résultat suivant :

$$\omega_{max} = 2\omega_1 + \alpha l^2 \nu \Delta k/(\tau_1^2 + \alpha l^2 \nu^2). \qquad (3.4.35)$$

En introduisant la longueur d'interaction quasi statique $L_\nu = \tau_1/\nu$, récrivons (3.4.35) sous la forme

$$\omega_{max} = 2\omega_1 + \frac{\Delta k}{\nu}\,\frac{\alpha(l/L_\nu)^2}{1+\alpha(l/L_\nu)^2}. \qquad (3.4.36)$$

Signalons qu'en faisant varier Δk on peut changer la fréquence correspondant au maximum de spectre du deuxième harmonique. Un générateur à changement de fréquence d'un tel type est décrit.

Revenons à la relation (3.4.31) et prenons $\Delta k = 0$. Dans ce cas on a [compte tenu de (3.4.6)]

$$|\Phi_2(l, \Omega)|^2 \sim \exp(-\Omega^2\tau_1^2/4)\operatorname{sinc}^2(\Omega\tau_1 l/2L_\nu). \qquad (3.4.37)$$

Pour $l/L_v \ll 1$ (c'est-à-dire à l'approximation quasi statique), la variation de $|\Phi_2(l, \Omega)|^2$ en fonction de $\Omega\tau_1$ est déterminée par le facteur $\exp(-\Omega^2\tau_1^2/4)$, alors que pour $l/L_v \gg 1$ (c'est-à-dire au régime essentiellement non stationnaire), cette dépendance est modulée par le facteur $\text{sinc}^2(\Omega\tau_1 l/2L_v)$. Ce qui vient d'être dit est illustré par la fig. 3.21, *a* qui montre deux courbes de variation du module de l'amplitude du spectre du deuxième harmonique $|\Phi_2(l)|$ en fonction de $\Omega\tau_1$: pour $l \ll L_v$ (courbe *1*) et pour $l/L_v = 5$ (courbe *2*). Ainsi, au régime substantiellement non stationnaire (pour $l \gg$

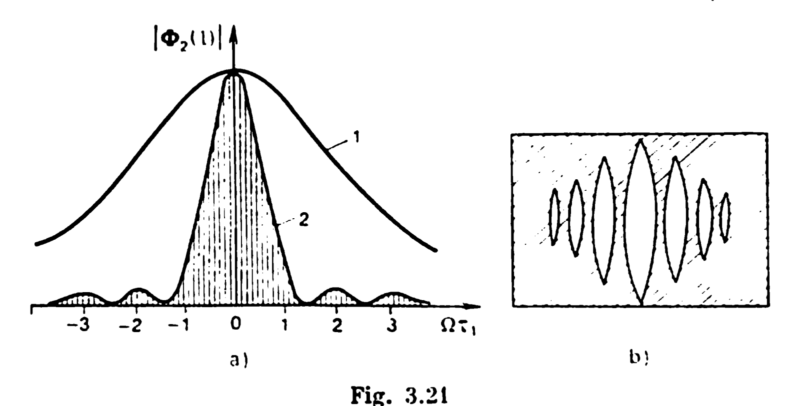


Fig. 3.21

$\gg L_v$), le spectre du deuxième harmonique se caractérise par une structure constituée de *plusieurs bandes* (v. fig. 3.21, *b* [25]).

A l'approximation quasi statique (pour $\nu = 0$), en posant $\Delta k = 0$, on obtient à partir de (3.4.30) l'expression suivante pour l'amplitude du spectre du deuxième harmonique :

$$\Phi_2(l, \Omega) = -iMl\sqrt{2\pi}\exp(-\Omega^2\tau_1^2/8)/\tau_1. \qquad (3.4.38)$$

En comparant (3.4.38) à (3.4.25), nous pouvons conclure qu'à cette approximation le spectre du deuxième harmonique est $\sqrt{2}$ fois plus large que le spectre du rayonnement d'onde fondamentale. Au régime non stationnaire ($\nu \neq 0$), la largeur du spectre du deuxième harmonique se détermine par le facteur $\exp[-(1 + \alpha l^2/L_v^2)\Omega^2\tau_1^2/4]$ qui entre dans (3.4.33) (rappelons que $\Delta k = 0$). Cette largeur a pour valeur

$$\Delta\omega_{dh} = 4\sqrt{2\ln 2}/\tau_1\sqrt{1 + \alpha l^2/L_v^2}. \qquad (3.4.39)$$

De l'expression (3.4.39) on déduit que lorsque l/L_v augmente, le spectre du deuxième harmonique se rétrécit notablement. En utilisant (3.4.39) et (3.4.25), on obtient

$$\Delta\omega_{dh}/\Delta\omega_1 = [2/(1 + \alpha l^2/L_v^2)]^{1/2}, \qquad (3.4.40)$$

où $\Delta\omega_l$ est la largeur du spectre de l'impulsion laser. La fig. 3.22 représente la variation, définie par la relation (3.4.40), du rapport $\Delta\omega_{dh}/\Delta\omega_l$ en fonction de l/L_ν. On voit que pour $l/L_\nu \geqslant 1{,}7$ la largeur du spectre du deuxième harmonique est plus petite que celle du spectre du rayonnement d'onde fondamentale.

Amplitude du champ de deuxième harmonique. — En introduisant (3.4.30) dans (3.4.15), on obtient l'expression suivante pour l'*amplitude du champ* de deuxième harmonique à la sortie du cristal :

$$A_2(l,\ \mu) = -i\frac{Ml\sqrt{2\pi}}{\tau_1}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\Omega^2\tau_1^2}{8}+i(\mu+\nu l)\,\Omega\right]\times \\ \times e^{i\varphi l/2}\operatorname{sinc}\frac{\varphi l}{2}\,d\Omega. \qquad (3.4.41)$$

En ayant recours à (3.4.32) et à (3.4.22), mettons l'intégrale (3.4.41) sous la forme

$$A_2(l,\ \mu) = -i\,(Ml\sqrt{2\pi}/\tau_1)\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\Omega^2\tau_1^2/8- \\ -\alpha(\Delta k-\nu\Omega)^2\,l^2/8+i\,(\Delta k-\nu\Omega)\,l/2+i\,(\mu+\nu l)\,\Omega]\,d\Omega. \qquad (3.4.42)$$

En posant $\Delta k = 0$, mettons (3.4.42) sous la forme

$$A_2(l,\ \mu) = -i\frac{Ml\sqrt{2\pi}}{\tau_1}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\times \\ \times\left[-\left(1+\alpha\frac{l^2}{L_\nu^2}\right)\frac{\Omega^2\tau_1^2}{8}+i\left(\mu+\frac{\tau_1 l}{2L_\nu}\right)\Omega\right]d\Omega. \qquad (3.4.43)$$

En faisant usage de (3.1.21), on obtient [compte tenu de (3.4.26)]

$$\boxed{A_2(l,\ \mu) = \frac{-i\sigma_2 A_0^2 l}{\sqrt{1+\alpha l^2/L_\nu^2}}\exp\left[-\frac{2(\mu+\tau_1 l/2L_\nu)^2}{\tau_1^2(1+\alpha l^2/L_\nu^2)}\right].} \qquad (3.4.44)$$

Quand $L_\nu \to \infty$ ($\nu \to 0$), le résultat (3.4.44) donne

$$A_2(l,\ \mu) = i\sigma_2 A_0^2 l\exp(-2\mu^2/\tau_1^2) \qquad (3.4.45)$$

[ce qui correspond à (2.6.19)]. Le rapprochement entre (3.4.45) et (3.4.24) montre qu'à l'approximation quasi statique la durée de l'impulsion de deuxième harmonique est $\sqrt{2}$ fois plus petite que celle de l'impulsion laser. Fait important : à cette approximation, les deux impulsions *coïncident* dans le temps (plus exactement, ce sont les maximums des impulsions qui coïncident). L'analogue spatial de ce phénomène est la coïncidence dans l'espace des faisceaux lumineux ordinaire et extraordinaire en l'absence de biréfringence.

Au régime non stationnaire la situation n'est pas la même. Premièrement, comme il résulte de (3.4.44), les maximums des impulsions sont décalés dans le « temps » μ d'une quantité $\tau_1 l/2L_\nu = \nu l/2$. Suivant le signe de ν, l'impulsion de deuxième harmonique est soit en avance sur l'impulsion laser ($\nu > 0$), soit en retard ($\nu < 0$). Deuxièmement, la forme de l'impulsion de deuxième harmonique se modifie sur la longueur l du cristal. Comme le montre (3.4.44),

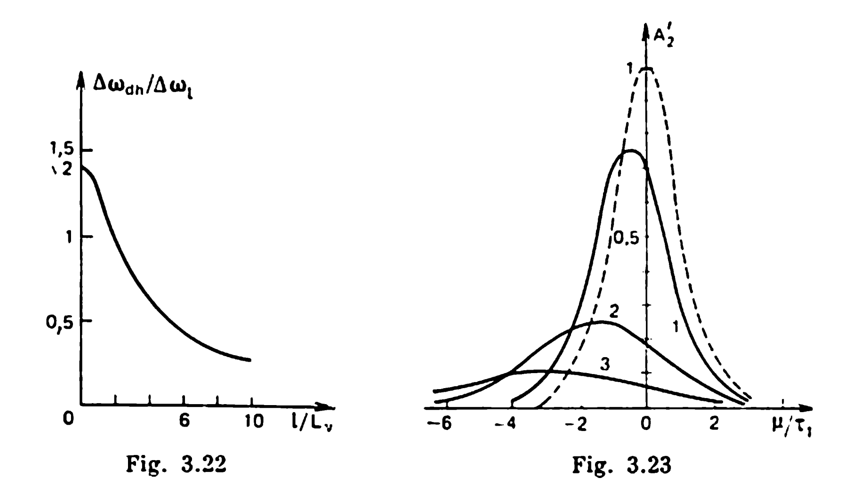


Fig. 3.22 Fig. 3.23

lorsque l/L_ν augmente, l'impulsion s'élargit, l'amplitude du champ de deuxième harmonique diminue. L'élargissement de l'impulsion correspond à la diminution de la largeur du spectre du deuxième harmonique, évoquée plus haut.

La fig. 3.23 représente les courbes de variation de l'amplitude du champ $A_2' = A_2(l, \mu)/(-i\sigma_2 A_0^2 l)$ en fonction de μ/τ_1 obtenues sur la base de (3.4.44) (c'est-à-dire à l'approximation du champ constant du rayonnement fondamental) pour $l/L_\nu = 1$ (courbe *1*), $l/L_\nu = 3$ (courbe *2*), $l/L_\nu = 5$ (courbe *3*). La courbe en traits interrompus se rapporte au cas de $l/L_\nu = 0$.

Efficacité de la génération de deuxième harmonique. — A partir de (3.4.44) on obtient pour la densité de puissance pendant l'impulsion de deuxième harmonique à la sortie du cristal

$$S_2(l, \mu) = cn_2 A_2(l, \mu) A_2^*(l, \mu)/8\pi =$$
$$= S_{2l}(1+\alpha q^2)^{-1} \exp[-4(\mu+\tau_1 q/2)^2/\tau_1^2(1+\alpha q^2)], \qquad (3.4.46)$$

où $q = l/L_\nu$; $S_{2l} = cn_2\sigma_2^2 A_0^4 l^2/8\pi$ est l'intensité du deuxième harmonique pour des ondes planes au régime stationnaire (pour $\nu = 0$, $\tau_1 \to \infty$). L'intégration de $S_2(l, \mu)$ sur μ donne la *densité d'énergie*

de l'impulsion de sortie du deuxième harmonique:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_2(l, \mu)\, d\mu = \frac{S_{2l}}{1+\alpha q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{4(\mu+\tau_1 q/2)^2}{\tau_1^2(1+\alpha q^2)}\right] d\mu =$$

$$= (S_{2l}\tau_1/2\sqrt{1+\alpha q^2}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = S_{2l}\tau_1\sqrt{\pi}/2\sqrt{1+\alpha q^2}. \qquad (3.4.47)$$

Il en résulte qu'au régime non stationnaire le coefficient de conversion en énergie (ou en puissance moyenne) est proportionnel à $(1 + \alpha q^2)^{-1/2}$: $\eta_2 \sim (1 + \alpha l^2/L_v^2)^{-1/2}$. En désignant par η_{2st} le coefficient de conversion en énergie obtenu à l'approximation quasi statique, on peut écrire

$$\boxed{\eta_2 = \eta_{2st}/\sqrt{1+\alpha l^2/L_v^2}.} \qquad (3.4.48)$$

La relation (3.4.48) montre bien que l'efficacité de la génération de deuxième harmonique *diminue* lorsque l/L_v augmente.

Remarques sur l'influence de la diffraction et de la biréfringence. — Pour une étude plus rigoureuse de la génération non stationnaire de deuxième harmonique par des impulsions laser ultracourtes il faut également tenir compte de la diffraction et de l'effet d'ouverture de diaphragme. Dans ce cas, tout en utilisant l'approximation du champ constant du rayonnement fondamental, on doit remplacer le système d'équations (3.4.12) par le système suivant [comparer à (2.9.20)]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1}\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{1}{2ik}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}\right) = 0\,; \\ &\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2}\frac{\partial A_2}{\partial t} + \beta\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{1}{2iK}\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}\right) = -i\sigma_2 A_1^2 e^{i\Delta k z}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.49)$$

La solution de ce système peut être trouvée en représentant les amplitudes du champ $A_{1,2}(z, x, y, t)$ par les intégrales de Fourier. C'est ainsi que l'amplitude du champ de deuxième harmonique se présente sous la forme

$$A_2(z, x, y, t) =$$

$$= \int\int\int \Phi_2(z, K_x, K_y, \Omega) \exp[i(\Omega t - K_x x - K_y y)]\, d\Omega\, dK_x\, dK_y, \qquad (3.4.50)$$

où $\Phi_2(z, K_x, K_y, \Omega)$ est l'amplitude du spectre des fréquences spatiales du deuxième harmonique.

Les calculs montrent que les effets spatiaux (de diffraction, d'ouverture) et les effets temporels (retard de groupe des impulsions) ont une influence notable les uns sur les autres; ils doivent donc être étudiés conjointement [25], [27].

§ 3.5. Génération de deuxième harmonique par un rayonnement laser à plusieurs fréquences

Au § 3.4 nous avons examiné la génération de deuxième harmonique à partir des impulsions laser ultracourtes uniques qui sont produites par le verrouillage des modes longitudinaux d'un laser. Une impulsion de durée τ a été représentée par l'intégrale de Fourier, ce qui correspondait à un spectre continu de fréquences de largeur $1/\tau$. Or, on sait que le verrouillage des modes longitudinaux a pour effet de produire non une impulsion unique mais une suite d'impulsions à laquelle correspond un spectre discontinu de fréquences. Il est donc raisonnable d'examiner la génération de deuxième harmonique dans le cas où le spectre du rayonnement fondamental constitué par l'ensemble des modes longitudinaux représente une *succession de fréquences discrètes.*

Duplication et addition des fréquences du rayonnement fondamental. — Pour plus de simplicité, supposons que les fréquences du rayonnement fondamental sont *équidistantes.* Désignons par $\Delta\omega$ l'intervalle séparant deux fréquences voisines et par N, le nombre total de fréquences (le nombre de modes longitudinaux); la largeur totale de spectre de fréquences est alors égale à $\Delta\omega\,(N-1)$. La fréquence ω_{1j} du j-ième mode longitudinal est exprimée par l'intermédiaire de la fréquence centrale ω_1 du rayonnement fondamental comme suit:

$$\omega_{1j} = \omega_1 - \Delta\omega\,(N-1)/2 + \Delta\omega\,(j-1) = \omega_1 + (2j - N - 1)\,\Delta\omega/2. \quad (3.5.1)$$

Les fréquences constituant le spectre du deuxième harmonique sont dues à deux processus: la *duplication* et l'*addition* des fréquences du rayonnement fondamental (v. § 1.4). Si le spectre du rayonnement fondamental contient N fréquences, celui du deuxième harmonique comportera $2N-1$ fréquences. L'équidistance des fréquences du rayonnement fondamental entraîne celle des fréquences du deuxième harmonique, de plus, l'écart entre deux fréquences voisines du deuxième harmonique est le même que celui entre les fréquences voisines du rayonnement fondamental. De même que pour le rayonnement fondamental, les fréquences du deuxième harmonique seront numérotées dans l'ordre de leur croissance: $\omega_{21} < \omega_{22} < \ldots < \omega_{2,2N-1}$.

Il est évident que la 1ère et la $(2N-1)$-ième fréquences du deuxième harmonique sont les doubles de la 1ère et de la N-ième fréquences du rayonnement fondamental respectivement. Les autres fréquences impaires du deuxième harmonique s'obtiennent tant par la duplication que par l'addition des fréquences du rayonnement fondamental. Toutes les fréquences paires du deuxième harmonique

se forment uniquement par addition des fréquences du rayonnement fondamental.

Ce qui vient d'être dit est illustré sur la fig. 3.24 qui représente trois cas : *a*) $N = 2$, *b*) $N = 3$, *c*) $N = 4$. Les flèches portées en traits continus désignent conventionnellement les processus de duplication de fréquences, et les paires de flèches en traits interrompus (ainsi qu'en traits mixtes) montrent les processus d'addition des fréquences. On voit que dans les cas *b*) et *c*) la fréquence ω_{23} peut résulter tant de la duplication de la fréquence ω_{12} que de l'addition des fréquences ω_{11} et ω_{13}; dans le cas *c*) la fréquence ω_{25} est formée par la duplication de la fréquence ω_{13} ainsi que par l'addition des fréquences ω_{12} et ω_{14}; la fréquence ω_{24} s'obtient dans le cas *c*) par suite de l'addition des fréquences ω_{12} et ω_{13}, ainsi que des fréquences ω_{11} et ω_{14}. Comme il sera montré plus loin, le verrouillage de phase des modes du rayonnement fondamental a une influence substantielle sur celles des composantes fréquentielles de l'intensité du deuxième harmonique dont les fréquences résultent de deux ou d'un plus grand nombre de processus, par exemple, de la duplication de la fréquence et de l'addition des fréquences ou de deux ou d'un plus grand nombre de processus d'addition des fréquences.

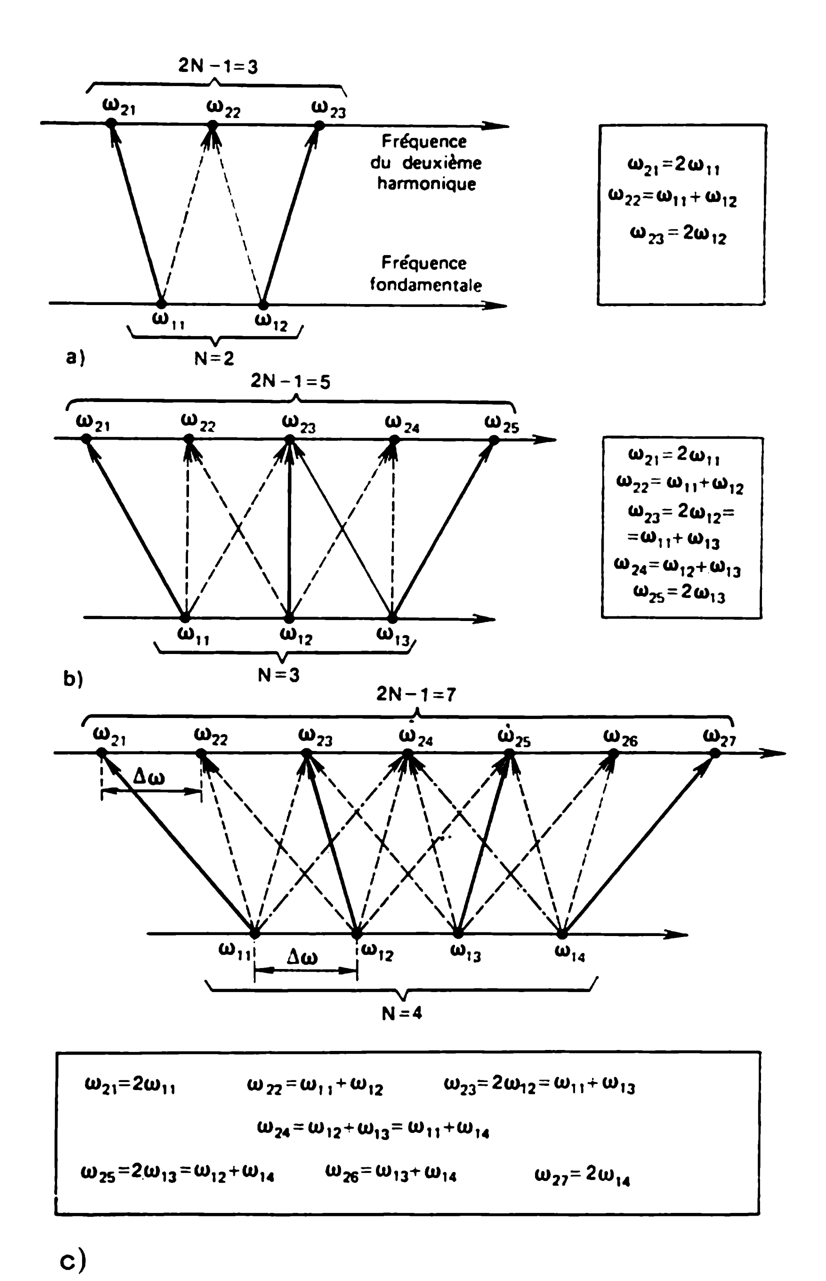
Signalons que la génération de deuxième harmonique est examinée ici à l'approximation du champ constant du rayonnement fondamental. Au régime non linéaire, la relation entre le spectre du deuxième harmonique et celui du rayonnement fondamental se trouve troublée par suite de l'apparition de composantes spectrales supplémentaires.

Equations tronquées. — Pour l'analyse qui suit nous utiliserons l'approximation des ondes planes en supposant qu'il existe un seul mode transverse à répartition uniforme du champ. Représentons l'intensité du champ de rayonnement fondamental sous la forme

$$E_1 = \sum_{j=1}^{N} [A_{1j} \exp(i\omega_{1j}t) + \text{c. c.}] = \sum_{j=1}^{N} a_{1j} [\exp(i\omega_{1j}t + i\varphi_{1j}) + \text{c. c.}], \tag{3.5.2}$$

où A_{1j}, a_{1j}, φ_{1j} sont respectivement l'amplitude complexe, l'amplitude réelle et la phase de j-ième mode longitudinal (mode de fréquence ω_{1j}). Dans le cas général, les amplitudes et les phases sont des fonctions aléatoires du temps. Dans ce qui suit nous supposerons que les amplitudes réelles (mais non les phases) sont constantes dans le temps. Une telle hypothèse tient à ce que c'est justement les fluctuations *de phase* et non pas celles d'amplitude du rayonnement fondamental qui ont une grande influence sur l'intensité du deuxième harmonique et sur ses fluctuations.

Les équations tronquées pour les amplitudes complexes seront examinées à l'approximation du champ constant du rayonnement



2N − 1 = 3
ω21 ω22 ω23
Fréquence du deuxième harmonique
Fréquence fondamentale
ω11 ω12
N = 2
a)
ω21 = 2ω11
ω22 = ω11 + ω12
ω23 = 2ω12
2N − 1 = 5
ω21 ω22 ω23 ω24 ω25
ω11 ω12 ω13
N = 3
b)
ω21 = 2ω11
ω22 = ω11 + ω12
ω23 = 2ω12 =
= ω11 + ω13
ω24 = ω12 + ω13
ω25 = 2ω13
2N − 1 = 7
ω21 ω22 ω23 ω24 ω25 ω26 ω27
Δω
ω11 ω12 ω13 ω14
Δω
N = 4
ω21 = 2ω11
ω22 = ω11 + ω12
ω23 = 2ω12 = ω11 + ω13
ω24 = ω12 + ω13 = ω11 + ω14
ω25 = 2ω13 = ω12 + ω14
ω26 = ω13 + ω14
ω27 = 2ω14
c)

Fig. 3.24

fondamental. Supposons que la dispersion du milieu peut être négligée et que la condition $\Delta k = 0$ est satisfaite pour toutes les composantes spectrales. Dans ce cas, au lieu de la seconde équation (3.4.12), on aura le système suivant de $2N - 1$ équations [1]:

$$\frac{\partial A_{2n}}{\partial z} + \frac{1}{u}\frac{\partial A_{2n}}{\partial t} = -i\sigma_2\Big(A_{1m}^2\xi_n + \sum_{j\neq k}\sum A_{1j}A_{1k}\Big), \quad n = 1, 2, \ldots, 2N-1. \tag{3.5.3}$$

Ici, A_{2n} est l'amplitude complexe de la n-ième composante spectrale du deuxième harmonique; $m = (n+1)/2$; $\xi_n = [(-1)^{n+1} + 1]/2$ ($\xi_n = 0$ pour les n pairs et $\xi_n = 1$ pour les n impairs). Les indices entiers j et k satisfont aux conditions:

$$j+k = n+1; \quad j \neq k; \quad 1 \leqslant j \leqslant N; \quad 1 \leqslant k \leqslant N. \tag{3.5.4}$$

Le premier terme entre parenthèses dans (3.5.3) est lié à la duplication de la fréquence du mode $(n + 1)/2$ du rayonnement fondamental (si, bien entendu, n est impair), alors que la somme double est liée à l'addition des fréquences de j-ième et k-ième modes.

Si, par exemple, $N = 3$, le système (3.5.3) prend, compte tenu de (3.5.4), la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned}
&\partial A_{21}/\partial z + u^{-1}\,\partial A_{21}/\partial t = -i\sigma_2 A_{11}^2;\\
&\partial A_{22}/\partial z + u^{-1}\,\partial A_{22}/\partial t = -i2\sigma_2 A_{11}A_{12};\\
&\partial A_{23}/\partial z + u^{-1}\,\partial A_{23}/\partial t = -i\sigma_2\,(A_{12}^2 + 2A_{11}A_{13});\\
&\partial A_{24}/\partial z + u^{-1}\,\partial A_{24}/\partial t = -i2\sigma_2 A_{12}A_{13};\\
&\partial A_{25}/\partial z + u^{-1}\,\partial A_{25}/\partial t = -i\sigma_2 A_{13}^2.
\end{aligned}\right\} \tag{3.5.5}$$

Il est facile de voir que les relations (3.5.5) sont en accord avec la fig. 3.24.

Passons de la variable t au temps local $\mu = t - z/u$ (v. § 3.4). Comme la dispersion du milieu est négligée, posons $\nu = 0$. Dans ce cas on obtient au lieu de (3.5.3) le système d'équations suivant:

$$\partial A_{2n}(z, \mu)/\partial z = -i\sigma_2\Big[A_{1m}^2(\mu)\,\xi_n + \sum_{j\neq k}\sum A_{1j}(\mu)\,A_{1k}(\mu)\Big], \quad n = 1, 2, \ldots, 2N-1. \tag{3.5.6}$$

En intégrant (3.5.6) sur la longueur du cristal depuis l'entrée jusqu'à z et en tenant compte du fait que le deuxième harmonique est nul à l'entrée du cristal, on trouve l'amplitude complexe de la n-ième com-

posante fréquentielle du deuxième harmonique:

$$A_{2n}(z,\ \mu) = -i\sigma_2 z \left[A_{1m}^2(\mu)\,\xi_n + \sum_{j\neq k}\sum A_{1j}(\mu)\,A_{1k}(\mu)\right]\cdot$$
$$n = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2N-1. \qquad (3.5.7)$$

Intensité du deuxième harmonique. — En se servant de (3.5.7), on obtient l'expression suivante pour l'intensité de la n-ième composante fréquentielle du deuxième harmonique:

$$I_{2n} = A_{2n}A_{2n}^* =$$
$$= (\sigma_2 z)^2 \left[\left(A_{1m}^2 A_{1m}^{*2} + A_{1m}^2 \sum_{j\neq k}\sum A_{1j}^* A_{1k}^* + A_{1m}^{*2}\sum_{j\neq k}\sum A_{1j}A_{1k}\right)\xi_n + \right.$$
$$\left. + \left(\sum_{j\neq k}\sum A_{1j}A_{1k}\right)\left(\sum_{p\neq q}\sum A_{1p}^* A_{1q}^*\right)\right]. \qquad (3.5.8)$$

Par la suite nous tiendrons compte de ce que

$$\left(\sum_{j\neq k}\sum A_{1j}A_{1k}\right)\left(\sum_{p\neq q}\sum A_{1p}^* A_{1q}^*\right) = 2\sum_{j\neq k}\sum A_{1j}A_{1k}A_{1j}^*A_{1k}^* +$$
$$+ \sum_{j\neq k\neq p\neq q}\sum\sum\sum (A_{1j}A_{1k}A_{1p}^*A_{1q}^* + A_{1j}^*A_{1k}^*A_{1p}A_{1q}). \qquad (3.5.9)$$

Les indices p et q ont la même signification que les indices j et k; ils satisfont aux conditions (3.5.4).

Passons des amplitudes complexes A aux amplitudes réelles a:

$$A_{1m}^2 A_{1m}^{*2} = a_{1m}^4; \qquad (3.5.10)$$

$$A_{1m}^2\sum_{j\neq k}\sum A_{1j}^*A_{1k}^* + A_{1m}^{*2}\sum_{j\neq k}\sum A_{1j}A_{1k} =$$
$$= a_{1m}^2\sum_{j\neq k}\sum a_{1j}a_{1k}\,\{\exp[i(2\varphi_{1m} - \varphi_{1j} - \varphi_{1k})] +$$
$$+ \exp[-i(2\varphi_{1m} - \varphi_{1j} - \varphi_{1k})]\} =$$
$$= 2a_{1m}^2\sum_{j\neq k}\sum a_{1j}a_{1k}\cos(2\varphi_{1m} - \varphi_{1j} - \varphi_{1k}); \qquad (3.5.11)$$

$$\sum_{j\neq k}\sum A_{1j}A_{1k}A_{1j}^*A_{1k}^* + \sum_{j\neq k}\sum (a_{1j}a_{1k})^2; \qquad (3.5.12)$$

$$\sum_{j\neq k\neq p\neq q}\sum\sum\sum (A_{1j}A_{1k}A_{1p}^*A_{1q}^* + A_{1j}^*A_{1k}^*A_{1p}A_{1q}) =$$
$$= 2\sum_{j\neq k\neq p\neq q}\sum\sum\sum a_{1j}a_{1k}a_{1p}a_{1q}\cos(\varphi_{1j} + \varphi_{1k} - \varphi_{1p} - \varphi_{1q}). \qquad (3.5.13)$$

En faisant usage de (3.5.9) à (3.5.13'), récrivons (3.5.8) sous la forme

$$I_{2n}=(\sigma_2 z)^2\Big[\Big(a_{1m}^4+2a_{1m}^2\sum_{j\neq k}\sum a_{1j}a_{1k}\times \times\cos(2\varphi_{1m}-\varphi_{1j}-\varphi_{1k})\Big)\xi_n+2\sum_{j\neq k}\sum(a_{1j}a_{1k})^2+ +2\sum_{j\neq k\neq p\neq q}\sum\sum\sum a_{1j}a_{1k}a_{1p}a_{1q}\cos(\varphi_{1j}+\varphi_{1k}-\varphi_{1p}-\varphi_{1q})\Big]. \tag{3.5.14}$$

Pour obtenir l'intensité totale du deuxième harmonique il faut effectuer une sommation de (3.5.14) sur n:

$$I_2=\sum_{n=1}^{2N-1} I_{2q}. \tag{3.5.15}$$

Représentons l'expression entre crochets de (3.5.14) comme une somme $\Psi_n+\Phi_n$, où

$$\Psi_n=a_{1m}^4\xi_n+2\sum_{j\neq k}\sum(a_{1j}a_{1k})^2; \tag{3.5.16}$$

$$\Phi_n=2a_{1m}^2\xi_n\sum_{j\neq k}\sum a_{1j}a_{1k}\cos(2\varphi_{1m}-\varphi_{1j}-\varphi_{1k})+ +2\sum_{j\neq k\neq p\neq q}\sum\sum\sum a_{1j}a_{1k}a_{1p}a_{1q}\cos(\varphi_{1j}+\varphi_{1k}-\varphi_{1p}-\varphi_{1q}). \tag{3.5.17}$$

Soulignons que Ψ_n ne dépend pas des phases des modes longitudinaux alors que Φ_n en dépend.

En appliquant (3.5.4) aux paires d'indices j, k et p, q, il n'est pas difficile de conclure que

$$\Phi_n=0 \text{ pour } n=1,\ 2,\ 2N-2,\ 2N-1. \tag{3.5.18}$$

L'égalité (3.5.18) signifie à son tour que la dépendance de l'intensité du deuxième harmonique vis-à-vis des phases des modes longitudinaux s'observe lorsque le nombre de modes n'est pas inférieur à trois ($N\geqslant 3$).

En faisant usage des relations (3.5.16) et (3.5.17), écrivons les expressions pour Ψ_n et Φ_n dans les cas où $N=2, 3, 4$. Pour $N=2$, on a

$$\Psi_1=a_{11}^4;\quad \Psi_2=4(a_{12}a_{11})^2;\quad \Psi_3=a_{12}^4; \tag{3.5.19a}$$

$$\Phi_1=\Phi_2=\Phi_3=0. \tag{3.5.19b}$$

Pour $N = 3$, on obtient

$$\left.\begin{array}{c}\Psi_1 = a_{11}^4; \quad \Psi_2 = 4(a_{12}a_{11})^2; \quad \Psi_3 = a_{12}^4 + 4(a_{11}a_{13})^2; \\ \Psi_4 = 4(a_{12}a_{13})^2; \quad \Psi_5 = a_{13}^4.\end{array}\right\} \quad (3.5.20a)$$

$$\left.\begin{array}{c}\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_4 = \Phi_5 = 0; \\ \Phi_3 = 4a_{12}^2 a_{11} a_{13} \cos(2\varphi_{12} - \varphi_{11} - \varphi_{13}).\end{array}\right\} \quad (3.5.20b)$$

Pour $N = 4$, on peut écrire

$$\left.\begin{array}{c}\Psi_1 = a_{11}^4; \quad \Psi_2 = 4(a_{12}a_{11})^2; \quad \Psi_3 = a_{12}^4 + 4(a_{11}a_{13})^2; \\ \Psi_4 = 4(a_{12}a_{13})^2 + 4(a_{11}a_{14})^2; \\ \Psi_5 = a_{13}^4 + 4(a_{12}a_{14})^2; \quad \Psi_6 = 4(a_{13}a_{14})^2; \quad \Psi_7 = a_{14}^4.\end{array}\right\} \quad (3.5.21a)$$

$$\left.\begin{array}{c}\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_6 = \Phi_7 = 0; \\ \Phi_3 = 4a_{12}^2 a_{13} a_{11} \cos(2\varphi_{12} - \varphi_{11} - \varphi_{13}); \\ \Phi_5 = 4a_{13}^2 a_{12} a_{14} \cos(2\varphi_{13} - \varphi_{12} - \varphi_{14}); \\ \Phi_4 = 8a_{12} a_{11} a_{14} a_{13} \cos(\varphi_{12} + \varphi_{13} - \varphi_{11} - \varphi_{14}).\end{array}\right\} \quad (3.5.21b)$$

Il est utile de comparer les résultats (3.5.19) à (3.5.21) avec les situations correspondantes représentées sur la fig. 3.24.

Modes non synchronisés. — Rappelons que les amplitudes réelles des modes du rayonnement fondamental sont supposées constantes dans le temps alors que les phases des modes sont des fonctions aléatoires du temps. L'intensité du deuxième harmonique mesurée par voie expérimentale est une intensité moyennée sur un intervalle de temps égal à la constante de temps du détecteur. Dans le cas des modes longitudinaux *non synchronisés*, la prise de cette moyenne rend nuls les cosinus de phases:

$$\left.\begin{array}{c}\langle\cos(2\varphi_{1m} - \varphi_{1j} - \varphi_{1k})\rangle = 0; \\ \langle\cos(\varphi_{1j} + \varphi_{1k} - \varphi_{1p} - \varphi_{1q})\rangle = 0.\end{array}\right. \quad (3.5.22)$$

Ainsi, appliquée aux modes non synchronisés, l'expression (3.5.14) ne conserve que la partie de Ψ_n indépendante des phases

$$\boxed{I_{2n}^{\text{ns}} = (\sigma_2 z)^2 \left[a_{1m}^4 \xi_n + 2 \sum_{j \neq k}\sum (a_{1j} a_{1k})^2\right].} \quad (3.5.23)$$

Supposons pour simplifier que les amplitudes réelles des modes du rayonnement fondamental sont non seulement constantes mais encore les mêmes pour tous les modes. Désignons-les par a_1. Effectuons la sommation dans (3.5.23) sur n de 1 à $2N - 1$, en tenant

compte de (3.5.4). Il vient

$$I_2^{ns} = \sum_{n=1}^{2N-1} I_{2n}^{ns} = (\sigma_2 z)^2 a_1^4 [N + 2N(N-1)] =$$

$$= (\sigma_2 z)^2 a_1^4 (2N^2 - N). \qquad (3.5.24)$$

Remarquons que $\sum_{n=1}^{2N-1} a_{1m}^4 \xi_n \to N a_1^4$;

$$\sum_{n=1}^{2N-1} 2 \sum_{j \neq k}\sum (a_{1j} a_{1k})^2 \to 2N(N-1) a_1^4.$$

On s'assure aisément que pour $N = 2, 3, 4$ l'expression (3.5.24) donne des résultats qui s'accordent avec ceux obtenus à partir de (3.5.19a), (3.5.20a) et (3.5.21a) respectivement.

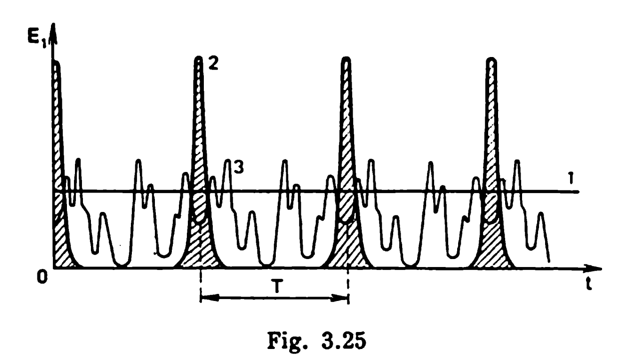


Fig. 3.25

En introduisant l'intensité du rayonnement fondamental $I_1 = N a_1^2$, récrivons (3.5.24) sous la forme

$$\boxed{I_2^{ns}(N) = (\sigma_2 z I_1)^2 (2 - 1/N).} \qquad (3.5.25)$$

Pour un rayonnement monofréquence ($N = 1$) on obtient

$$I_2^{l}(1) = (\sigma_2 z I_1)^2. \qquad (3.5.26)$$

Ainsi

$$I_2^{ns}(N)/I_2(1) = 2 - 1/N. \qquad (3.5.27)$$

On voit que l'efficacité de la conversion en deuxième harmonique est 2 fois *plus grande* dans un laser à modes non synchronisés fonctionnant sur plusieurs fréquences que lors du rayonnement monofréquence.

Reportons-nous à la fig. 3.25 pour expliquer l'augmentation de l'efficacité de la conversion lorsqu'on passe du rayonnement fonda-

mental monofréquence au rayonnement sur plusieurs fréquences. Sur cette figure on compare les variations de l'intensité de champ du rayonnement fondamental en fonction du temps pour un seul mode stabilisé (droite *1*), pour un grand nombre de modes synchronisés (courbe *2*) et pour un grand nombre de modes à phases aléatoires, c'est-à-dire des modes non synchronisés (courbe *3*). Les modes synchronisés produisent une suite régulière d'impulsions lumineuses séparées par un intervalle de temps $T = 2L/v$ (L étant la longueur du résonateur laser, v, la vitesse de la lumière à l'intérieur du résonateur). La fonction $E_1(t)$ pour les modes non synchronisés se présente sous forme d'un train de « sauts » aléatoires qui se répètent avec une période T. Comme le champ du deuxième harmonique est proportionnel à E_1^2 (et non à E_1), la croissance du deuxième harmonique aux sommets de cette « figure de bruit » se trouve assez forte, si bien que l'efficacité de la conversion est dans l'ensemble plus grande que dans le cas d'un mode stabilisé unique. A en juger par l'aspect de la figure, l'efficacité de la génération de deuxième harmonique doit être encore plus élevée pour les modes synchronisés.

Remarques sur les fluctuations de l'intensité du deuxième harmonique. — L'effet favorable d'augmentation de l'intensité du deuxième harmonique en cas d'utilisation d'un rayonnement laser à plusieurs fréquences s'accompagne, lorsque les modes ne sont pas synchronisés, d'un effet défavorable d'augmentation des fluctuations de l'intensité du deuxième harmonique [1]. Soulignons que les fluctuations de l'intensité du deuxième harmonique sont liées principalement à des fluctuations *de phase* (et non d'amplitude) du rayonnement fondamental. Elles s'observent en particulier aussi dans le cas où les amplitudes des modes laser sont stabilisées.

Les fluctuations de l'intensité I_2 se manifestent surtout lors de la génération de deuxième harmonique à l'aide des lasers relaxés produisant des picots. En comparant l'intensité des picots distincts du rayonnement fondamental à celle du deuxième harmonique, on constate qu'entre leurs valeurs il n'existe pas de corrélation mutuelle ou tout au plus cette corrélation est très faible. En d'autres termes, à un picot peu intense du rayonnement fondamental peut correspondre un picot suffisamment intense du deuxième harmonique et vice versa. Ceci est facile à saisir si l'on tient compte du fait que chaque picot de rayonnement laser comporte toute une série de modes longitudinaux dont les phases subissent des fluctuations d'un picot à l'autre. Dans certains picots, la combinaison des phases des modes peut provoquer l'addition des amplitudes des modes et donc une très forte croissance de l'intensité des picots correspondants du deuxième harmonique. Dans d'autres picots, les relations de phase entre les modes peuvent au contraire provoquer une diminution de l'intensité des picots correspondants du deuxième harmonique.

Cet effet est illustré par la fig. 3.26 qui montre les picots de rayon-

nement fondamental (en *a*) et les picots de deuxième harmonique (en *b*). Le laser fonctionne au régime de pulsations régulières d'intensité constante. L'examen de cette figure permet de constater une absence presque totale de la corrélation mutuelle en amplitude entre les picots de rayonnement laser et ceux de deuxième harmonique.

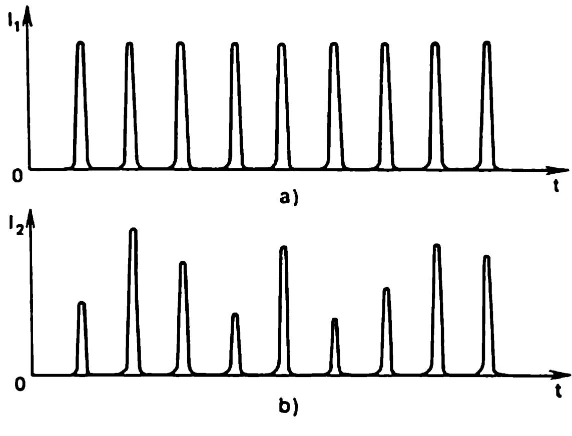


Fig. 3.26

Les fluctuations observées des picots de deuxième harmonique sont une conséquence directe des fluctuations des phases des modes du rayonnement fondamental.

Pour obtenir un gain appréciable en efficacité de la conversion et éliminer en même temps les fluctuations de l'intensité du deuxième harmonique indiquées plus haut il convient d'avoir recours à des lasers à modes synchronisés.

Modes synchronisés. — L'équidistance des fréquences de rayonnement fondamental [v. (3.5.1)] est une condition nécessaire mais non suffisante de *synchronisation* des modes. Pour la synchronisation des modes il est nécessaire que les *phases* des modes soient elles aussi *équidistantes*:

$$\varphi_{1j} = \varphi_{11} + (j-1)\,\Delta\varphi \qquad (3.5.28)$$

(ici $\Delta\varphi$ est l'intervalle de phase de deux modes voisins).

L'effet de synchronisation ne peut s'observer qu'en présence de trois modes au moins ($N \geqslant 3$). Pour $N = 3$, la synchronisation des modes s'observe si, en vertu de (3.5.28), $2\varphi_{12} = \varphi_{11} + \varphi_{13}$. Dans ce cas

$$\cos(2\varphi_{12} - \varphi_{11} - \varphi_{13}) = 1 \qquad (3.5.29)$$

et il résulte de (3.5.20b) que

$$\Phi_3 = 4a_{12}^2 a_{11} a_{13}. \qquad (3.5.29c)$$

Pour $N = 4$, la synchronisation des modes signifie que selon (3.5.28) $2\varphi_{12} = \varphi_{11} + \varphi_{13}$, $\varphi_{12} + \varphi_{13} = \varphi_{11} + \varphi_{14}$, $2\varphi_{13} = \varphi_{12} + \varphi_{14}$ et, par conséquent,

$$\cos(2\varphi_{12} - \varphi_{11} - \varphi_{13}) = \cos(2\varphi_{13} - \varphi_{12} - \varphi_{14}) = \cos(\varphi_{12} + \varphi_{13} - \varphi_{11} - \varphi_{14}) = 1. \quad (3.5.30)$$

De (3.5.21b) et (3.5.30) on déduit que

$$\Phi_3 = 4a_{12}^2 a_{11} a_{13}\ ;\ \Phi_4 = 8a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ ;\ \Phi_5 = 4a_{13}^2 a_{12} a_{14}. \quad (3.5.21c)$$

Ainsi, dans le cas général, où les modes sont synchronisés, il convient de poser dans (3.5.14)

$$\cos(2\varphi_{1m} - \varphi_{1j} - \varphi_{1k}) = 1\ ;$$
$$\cos(\varphi_{1j} + \varphi_{1k} - \varphi_{1p} - \varphi_{1q}) = 1. \quad (3.5.31)$$

En définitive, l'expression (3.5.14) prend la forme suivante:

$$I_{2n}^{s} = (\sigma_2 z)^2 \Big[\Big(a_{1m}^4 + 2a_{1m}^2 \sum_{j\neq k}\sum a_{1j} a_{1k} \Big) \times \xi_n + 2 \sum_{j\neq k}\sum (a_{1j}a_{1k})^2 + 2 \sum_{j\neq k\neq p\neq q}\sum\sum\sum a_{1j}a_{1k}a_{1p}a_{1q} \Big]. \quad (3.5.32)$$

En effectuant dans (3.5.32) la sommation sur n de 1 à $2N - 1$ et en tenant compte de (3.5.4), on obtient dans le cas où les modes sont synchronisés et leurs amplitudes réelles sont égales le résultat suivant pour l'intensité totale du deuxième harmonique:

$$I_2^s(N) = (\sigma_2 z)^2 a_1^4 N (2N^2 + 1)/3, \quad (3.5.33)$$

ou encore, en introduisant $I_1 = Na_1^2$,

$$I_2^s(N) = (\sigma_2 z I_1)^2 (2N + 1/N)/3. \quad (3.5.34)$$

Pour $N = 3$ et $N = 4$, l'expression (3.5.33) donne des résultats qui s'accordent avec les résultats obtenus à partir de (3.5.20c) et (3.5.21c) respectivement. Il est facile de voir que pour $N = 2$, $I_2^s = I_2^{ns}$. Dans ces conditions donc parler du synchronisme des modes n'a pas de sens.

De (3.5.25) et (3.5.34) il s'ensuit que

$$I_2^s(N)/I_2^{ns}(N) = (2N^2 + 1)/3(2N - 1). \quad (3.5.35)$$

Vu que N ne peut être inférieur à trois et qu'en pratique il est beaucoup plus grand, récrivons (3.5.35) sous une forme plus simple

$$I_2^s(N)/I_2^{ns}(N) \approx N/3. \quad (3.5.35a)$$

Dans le cas d'un laser continu à YAG : Nd^{3+}, le nombre de modes synchronisés est généralement compris entre 20 et 50. Le gain en efficacité de la génération de deuxième harmonique par rapport au cas des modes non synchronisés est donc de l'ordre de 10.

Sur les modes partiellement synchronisés[1]. — En pratique, on a souvent affaire à des lasers dont les modes ne sont synchronisés que partiellement. On peut considérer trois cas différents de synchronisation partielle [1] :

les modes sont synchronisés par groupes ou, en d'autres termes, par domaines (clusters) ; les domaines des modes ne sont pas mutuellement synchronisés ;

au centre de la raie de génération un groupe de modes est synchronisé, alors qu'aux bords de la raie les modes ne le sont pas ;

les modes subissent des fluctuations sur un intervalle inférieur à 2π.

Signalons que dans les lasers à solides la synchronisation incomplète des modes est spontanée. Autrement dit, elle n'est pas une conséquence d'un facteur modulant (synchronisant) extérieur quelconque.

Il est naturel que l'efficacité de la génération de deuxième harmonique est plus grande en présence de synchronisation partielle que dans le cas des modes non synchronisés. Mais l'instabilité du deuxième harmonique peut augmenter elle aussi par suite des fluctuations du nombre de domaines et de leur largeur. Ce sont les relations de phase entre les fréquences porteuses de chaque domaine, ainsi que le nombre de domaines dans le spectre du rayonnement laser, qui ont la plus grande influence sur l'efficacité de la génération de deuxième harmonique.

§ 3.6. Quelques remarques générales

Au cours des paragraphes qui précèdent nous avons examiné successivement les différentes conditions dans lesquelles se déroule la génération de deuxième harmonique et pris en considération les divers facteurs influant sur l'efficacité de ce processus. La génération de deuxième harmonique a été étudiée pour les ondes planes, les faisceaux lumineux divergents, les impulsions lumineuses (approximation quasi statique), les faisceaux lumineux d'ouverture finie spatialement modulés, les faisceaux gaussiens focalisés, les impulsions lumineuses ultracourtes (régime non stationnaire) et le rayonnement à plusieurs fréquences. On a tenu séparément compte des facteurs tels que l'inhomogénéité du milieu, les auto-actions thermiques, l'absorption non linéaire, la photoréfraction, la génération de porteurs libres.

Une telle étude *conséquente* des divers aspects de la génération de deuxième harmonique s'explique non seulement par des considérations méthodiques mais également par de grosses difficultés mathématiques auxquelles on se heurte lorsqu'on veut développer une théorie adéquate de ce processus, théorie qui prenne *à la fois* en considération tous les facteurs mentionnés ci-dessus.

Système complet d'équations tronquées pour la génération de deuxième harmonique. — Dans les conditions réelles, le processus

[1] Pour la génération de deuxième harmonique par un rayonnement laser à modes partiellement synchronisés, voir par exemple [28].

de génération de deuxième harmonique se caractérise par une grande complexité, un grand nombre d'aspects et de phénomènes annexes. Les méthodes de calcul mises au point jusqu'à présent ne sont pas capables d'embrasser l'*ensemble* des phénomènes que fait intervenir le processus réel de génération de deuxième harmonique. Les résultats des paragraphes précédents permettent cependant d'établir aisément un système suffisamment complet d'équations différentielles tronquées décrivant le processus de génération de deuxième harmonique. Considérons ce système en nous bornant, par raison de simplification, à l'interaction *ooe*.

L'équation de départ est l'équation d'onde [v. (1.1.16)]

$$\left(\mathrm{rot\,rot} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P}_l(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P}_q(\mathbf{r}, t), \qquad (3.6.1)$$

à laquelle on adjoint les équations pour la polarisation linéaire $\mathbf{P}_l$ et la polarisation quadratique $\mathbf{P}_q$ [v. (1.2.1) et (1.2.4)]:

$$P_{li}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{3}\int_0^\infty \alpha_{ik}(\tau) E_k(\mathbf{r}, t-\tau)\, d\tau; \qquad (3.6.2)$$

$$P_{qi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_{ikj}(\tau', \tau'') E_k(\mathbf{r}, t-\tau') \times E_j(\mathbf{r}, t-\tau'-\tau'')\, d\tau'\, d\tau''. \qquad (3.6.3)$$

Notons que les équations (3.6.2) et (3.6.3) tiennent compte de la dispersion temporelle mais négligent la dispersion spatiale des susceptibilités diélectriques α et χ.

Représentons le champ de rayonnement sous la forme [comparer à (2.2.2)]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2}\{\mathbf{e}_n A_n(\mathbf{r}, t)\exp[i(\omega_n t - \mathbf{k}_n\mathbf{r})] + \mathrm{c.c.}\}, \qquad (3.6.4)$$

c'est-à-dire par une superposition de l'onde de la fréquence fondamentale ($n = 1$) et de l'onde du deuxième harmonique ($n = 2$). En faisant usage de (3.6.1) à (3.6.4) et en négligeant la dérivée seconde par rapport à z, on peut obtenir le système suivant d'équations tronquées pour les amplitudes complexes [comparer à (2.2.22), (2.7.4), (2.7.39), (3.4.11)]:

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{M}_1 A_1 &= -i\sigma_1 A_1^* A_2 \exp(-i\Delta kz);\\ \hat{M}_2 A_2 &= -i\sigma_2 A_1^2 \exp(i\Delta kz),\end{aligned}} \qquad (3.6.5)$$

où

$$\hat{M}_n = \frac{\partial}{\partial z} + \beta_n \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2k_n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{u_n}\frac{\partial}{\partial t} + ig_n \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \delta_n + Q_n(A). \tag{3.6.6}$$

Rappelons qu'ici σ_n sont les coefficients de couplage non linéaire (v. § 2.2); δ_n, les coefficients d'absorption linéaire (v. § 2.2); u_n, les vitesses de groupe; β_2 est l'angle d'anisotropie, $\beta_1 = 0$ (v. § 2.7); $g_n = (\partial^2 k_n/\partial\omega^2)_{\omega_n}/2$ sont les coefficients de flou de dispersion des impulsions lumineuses. Le terme en $\partial/\partial x$ reflète l'*anisotropie* d'un milieu non linéaire et de la *dérive de l'énergie* de l'onde extraordinaire qui en résulte (v. § 2.7). Les termes contenant les dérivées secondes par rapport aux coordonnées spatiales transversales sont relatifs aux effets *de diffraction*, dont la prise en compte revêt une importance de principe, en particulier, lors de l'étude des faisceaux gaussiens (v. § 2.9). Le terme en $\partial/\partial t$ est lié à l'effet de *retard de groupe* des impulsions, et le terme en $\partial^2/\partial t^2$, au *flou de dispersion* des impulsions (v. § 2.6 et § 3.4). Le terme $Q_n(A)$ qui tient compte de l'absorption *non linéaire* (à deux photons) est de la forme

$$Q_1 = \beta_{12} \mid A_2 \mid^2; \quad Q_2 = 2\beta_{12} \mid A_1 \mid^2 + \beta_{22} \mid A_2 \mid^2, \tag{3.6.7}$$

où β_{12} et β_{22} sont les coefficients d'absorption non linéaire (v. § 3.3).

Le *désaccord d'onde* Δk peut être représenté sous la forme (v. § 3.2 et § 3.3)

$$\Delta k = \Delta k_1 + \Delta k_{at} + \Delta k_{phr} + \Delta k_{gpl}, \tag{3.6.8}$$

où Δk_1 est le désaccord linéaire; Δk_{at}, le désaccord dû aux auto-actions thermiques; Δk_{phr}, le désaccord dû à la photoréfraction; Δk_{gpl}, le désaccord lié à la génération de porteurs libres. La relation (3.6.8) illustre bien le caractère coopératif complexe de la génération de deuxième harmonique dans des situations réelles. Les divers termes figurant dans (3.6.8) varient de façon différente en fonction des amplitudes des champs. La valeur de Δk varie de façon substantielle avec la distance z dans le cristal non linéaire, alors que l'intensité de sortie du deuxième harmonique est déterminée dans une large mesure par l'interaction des effets traduits par les divers termes de la relation (3.6.8). Ceci signifie que l'*optimisation* du coefficient de conversion suivant les paramètres du processus de génération de deuxième harmonique est un problème bien complexe qui n'est pas jusqu'à présent résolu sous la forme générale. Actuellement, l'optimisation de ce processus n'est réalisée que dans certains cas particuliers dont plusieurs ont été examinés aux paragraphes précédents.

Un fait d'importance pratique est que les équations (3.6.5) à

(3.6.8) complétées de l'équation de la chaleur qui tient compte de l'absorption tant linéaire que non linéaire [v. (3.3.5)] permettent de résoudre le problème *direct*, c'est-à-dire de déterminer l'intensité, la distribution dans l'espace et dans le temps, ainsi que la distribution spectrale du deuxième harmonique à la sortie du cristal. Quant au problème *inverse*, qui consiste à déterminer les paramètres du rayonnement laser et du cristal non linéaire à partir des caractéristiques de sortie prédéterminées du deuxième harmonique, il s'avère beaucoup plus difficile à résoudre.

Analogie spatio-temporelle. — Commençons par signaler une analogie qu'on établit dans la théorie des oscillations entre les processus de variation des amplitudes et des phases des ondes se propageant dans des milieux non linéaires répartis et les processus se déroulant dans des systèmes oscillants à paramètres concentrés [29]. C'est ainsi qu'au problème aux limites de la génération stationnaire de deuxième harmonique est analogue, dans le cadre de l'approximation des ondes planes, le problème temporel de l'excitation par choc de deux circuits oscillants couplés par une capacité non linéaire, l'un des circuits étant accordé sur la fréquence ω, et l'autre sur la fréquence 2ω. Pourtant l'introduction dans le processus de génération de deuxième harmonique d'une coordonnée temporelle (dans des cas non stationnaires) rend cette analogie inacceptable parce que les systèmes oscillants à paramètres concentrés n'ont pas d'analogue de la coordonnée spatiale.

Examinons de plus près une autre forme de l'analogie spatio-temporelle. Il s'agit de l'analogie qui se manifeste « à l'intérieur » du processus de génération de deuxième harmonique et réside en une équivalence mutuelle des équations différentielles décrivant les interactions des ondes modulées soit uniquement dans le temps, soit uniquement suivant les coordonnées spatiales transversales [27].

Dans le cas des ondes modulées uniquement *dans le temps*, l'opérateur $\hat{M}_n$ [v. (3.6.6)] prend la forme

$$\hat{M}_n = \partial/\partial z + u_n^{-1}\partial/\partial t + ig_n\partial^2/\partial t^2, \tag{3.6.9}$$

alors que dans le cas des ondes soumises uniquement à la modulation *spatiale* cet opérateur devient

$$\hat{M}_n = \partial/\partial z + \beta_n\partial/\partial x + (i/2k_n)(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2). \tag{3.6.10}$$

De l'aspect des opérateurs (3.6.9) et (3.6.10) on peut déjà conclure que le comportement d'une *impulsion lumineuse* doit être analogue à celui d'un *faisceau d'ondes* bidimensionnel. Ecrivons, pour plus de clarté, les équations tronquées pour les *impulsions lumineuses* (plus exactement, pour les ondes planes modulées uniquement dans le temps). En se servant de (3.6.9), il n'est pas difficile de mettre le

système d'équations (3.6.5) sous la forme

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A_1}{\partial z} + ig_1\frac{\partial^2 A_1}{\partial \mu^2} = -i\sigma_1 A_1^* A_2 \exp(-i\Delta kz);\\ &\frac{\partial A_2}{\partial z} - \nu\frac{\partial A_2}{\partial \mu} + ig_2\frac{\partial^2 A_2}{\partial \mu^2} = -i\sigma_2 A_1^2 \exp(i\Delta kz), \end{aligned} \qquad (3.6.11)$$

où, rappelons-le, $\nu = u_1^{-1} - u_2^{-1}$, $\mu = t - z/u_1$ (v. § 3.4). Puis, en faisant usage de (3.6.10), on tire de (3.6.5) le système d'équations tronquées pour les *faisceaux d'ondes*, c'est-à-dire pour les ondes modulées uniquement suivant les *coordonnées spatiales transversales*:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{i}{2k_1}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}\right) =\\ &= -i\sigma_1 A_1^* A_2 \exp(-i\Delta\, kz);\\ &\frac{\partial A_2}{\partial z} + \beta\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{i}{2k_2}\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}\right) =\\ &= -i\sigma_2 A_1^2 \exp(i\Delta\, kz). \end{aligned} \qquad (3.6.12)$$

L'équivalence mathématique des systèmes d'équations (3.6.11) et (3.6.12) est évidente. Le flou de dispersion des impulsions lumineuses est analogue *à l'élargissement de diffraction* des faisceaux d'ondes et le retard de groupe des impulsions est analogue *au décalage latéral* de l'énergie des faisceaux d'ouverture finie. Le désaccord des vitesses de groupe ν est analogue à l'angle d'anisotropie β. On sait que le retard de groupe et le flou de dispersion des impulsions peuvent être négligés si sont réalisées les inégalités

$$l < L_\beta; \quad l < L_{\mathrm{dis}}, \qquad (3.6.13)$$

où $L_\nu = \tau/\nu$ est la longueur d'interaction quasi statique; $L_{\mathrm{dis}} = \tau^2/g$, la longueur du flou de dispersion; l, la longueur du cristal non linéaire. D'une manière analogue, on peut négliger le décalage latéral de l'énergie et l'élargissement de diffraction des faisceaux lorsque sont réalisées les inégalités (v. § 2.7)

$$l < L_\beta; \quad l < L_{\mathrm{dif}}, \qquad (3.6.14)$$

où $L_\beta = d_0/\beta$ est la longueur d'ouverture; $L_{\mathrm{dif}} = kd_0^2$, la longueur de l'élargissement de diffraction. Il est facile de voir que la longueur d'interaction quasi statique L_ν, sur laquelle les impulsions de durée τ (impulsions de rayonnement fondamental et de deuxième harmonique) se séparent complètement l'une de l'autre dans le temps, est analogue à la longueur d'ouverture L_β, sur laquelle les faisceaux

d'ouverture d_0 se séparent complètement l'un de l'autre dans l'espace. Il existe de même une analogie entre la longueur du flou de dispersion L_{dis} des impulsions et la longueur de l'élargissement de diffraction L_{dif} des faisceaux.

On montre [1] que l'analogie qui vient d'être considérée pourrait être plus complète si, en plus de la dispersion temporelle des susceptibilités diélectriques, on tenait également compte de leur dispersion spatiale.

Notons pour terminer que l'analogie spatio-temporelle n'existe pas :

lorsque les ondes sont modulées à la fois dans le temps et suivant les coordonnées spatiales transversales ; c'est le cas, par exemple, de la génération de deuxième harmonique à partir des faisceaux gaussiens du rayonnement fondamental à modes longitudinaux synchronisés ;

si l'examen de l'interaction des faisceaux d'ondes fait intervenir des facteurs qui n'ont pas d'analogues dans la théorie de l'interaction des impulsions lumineuses et vice versa ;

lorsqu'on tient compte de certains facteurs spéciaux influant sur l'efficacité de la génération de deuxième harmonique, par exemple, des auto-actions thermiques.

§ 3.7. Schémas optiques de la génération extracavité de deuxième harmonique

Passons à l'étude des circuits optiques utilisés pour la génération extracavité de deuxième harmonique. Le terme « extracavité » signifie que le cristal non linéaire se trouve en dehors de la cavité laser utilisée pour la production du rayonnement à la fréquence fondamentale. C'est justement pour une telle situation que les divers aspects de la génération de deuxième harmonique ont été étudiés au cours des chap. 2 et 3. L'étude de la génération *intracavité* de deuxième harmonique est réservée pour le chap. 4.

Schémas classiques. — La fig. 3.27 représente trois schémas optiques qui peuvent être dits classiques : *a*) simple, *b*) à expanseur sphérique du faisceau, *c*) à focalisation sphérique du faisceau. On distingue sur cette figure : *1*, le laser ; *2*, le cristal non linéaire ; *3*, un télescope constitué par une lentille divergente et une lentille sphérique convergente ; *4*, une lentille sphérique focalisatrice ; *5*, une lentille sphérique correctrice ; z', la direction de l'axe optique du cristal ; θ_s, l'angle de synchronisme.

Le schéma *a*) est utilisé dans les constructions les plus simples des convertisseurs de fréquence, par exemple, dans les générateurs de production soviétique ЛТИПЧ [30]. La simplicité de la construction et la sécurité de fonctionnement dans ce schéma sont obtenues au prix d'une certaine réduction de l'efficacité de la conversion.

Le schéma *b*) à expanseur sphérique du faisceau est utilisé dans les cas où il s'agit de diminuer la divergence du rayonnement fondamental et de réduire par là même le désaccord d'onde. Bien que la densité de puissance émise s'en trouve réduite, l'efficacité de la conversion dans ce schéma peut être augmentée (grâce à la réduction

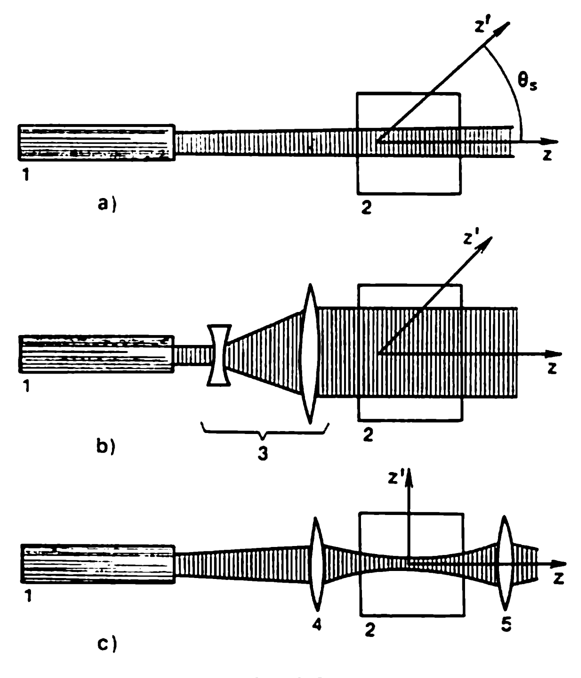


Fig. 3.27

du désaccord d'onde). On a recours à ce schéma aussi dans le cas où la puissance de rayonnement laser dépasse une certaine valeur limite correspondant à la résistance au rayonnement du cristal.

Quand on utilise des lasers continus ou quasi continus relativement peu puissants, il devient nécessaire d'augmenter la densité de puissance du rayonnement fondamental. Dans de tels cas on peut faire usage du schéma *c*) destiné à focaliser le rayonnement sur le cristal non linéaire. Ce faisant, on utilise la focalisation optimale (v. § 2.9). Dans de tels schémas on assure généralement un synchronisme à 90° pour éliminer le décalage de l'énergie de l'onde extraordinaire, cet effet étant bien marqué lorsque l'ouverture du faisceau est petite.

Il importe de noter que l'*expansion* et la *focalisation* du faisceau ont des conséquences tant positives que négatives. L'expansion permet de diminuer la divergence et donc le désaccord d'onde, mais

la densité de puissance du rayonnement fondamental s'en trouve réduite. La focalisation, au contraire, augmente la densité de puissance mais fait croître en même temps la divergence du faisceau. Cette contradiction (du point de vue de l'efficacité de la conversion) est résolue de la façon optimale dans les schémas à lentilles *cylindriques.*

Schémas à lentilles cylindriques. — L'efficacité de la conversion en deuxième harmonique ne dépend de la divergence du faisceau que dans le *plan de synchronisme* (autrement dit, dans le plan de la

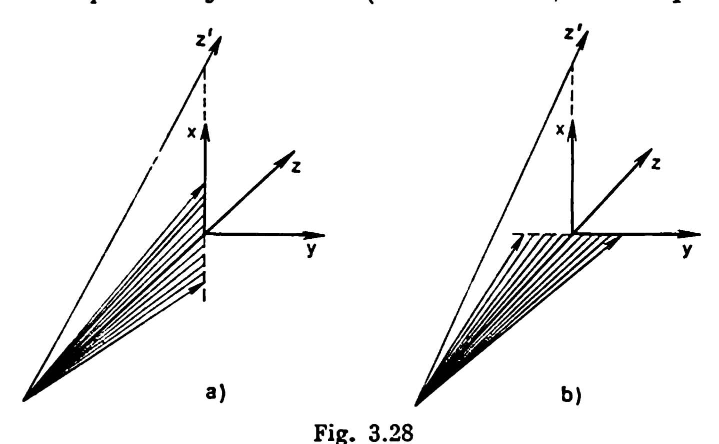


Fig. 3.28

section principale du cristal); quant à la divergence dans un plan perpendiculaire, elle n'influe pas sur l'efficacité de la conversion. En d'autres termes, le désaccord d'onde est fortement influencé par la divergence du faisceau représentée sur la fig. 3.28, *a* et faiblement, par celle de la fig. 3.28, *b* (cette circonstance a été prise en considération au § 2.5). C'est précisément sur ce fait que repose l'utilisation des lentilles cylindriques dans les schémas *hautement efficaces* de la génération de deuxième harmonique [31]. La fig. 3.29 montre quatre schémas de ce type. Dans cette figure, *1* représente le laser, *2*, le cristal non linéaire, *S*, le plan de synchronisme.

Le schéma de la fig. 3.29, *a* est utilisé comme expanseur du faisceau. Il contient deux lentilles cylindriques dont les génératrices sont dirigées le long de l'axe des y, c'est-à-dire perpendiculairement au plan de synchronisme (v. figure). L'expansion du faisceau et donc la diminution de la divergence ne se produit que le long de l'axe des x, c'est-à-dire dans le plan de synchronisme. Quant au plan perpendiculaire, le faisceau ne subit pas d'expansion et sa divergence le long de l'axe des y reste inchangée. Ceci n'affecte pas le désaccord d'onde mais est très important pour conserver une densité relativement élevée de puissance de rayonnement. Ainsi, dans le schéma con-

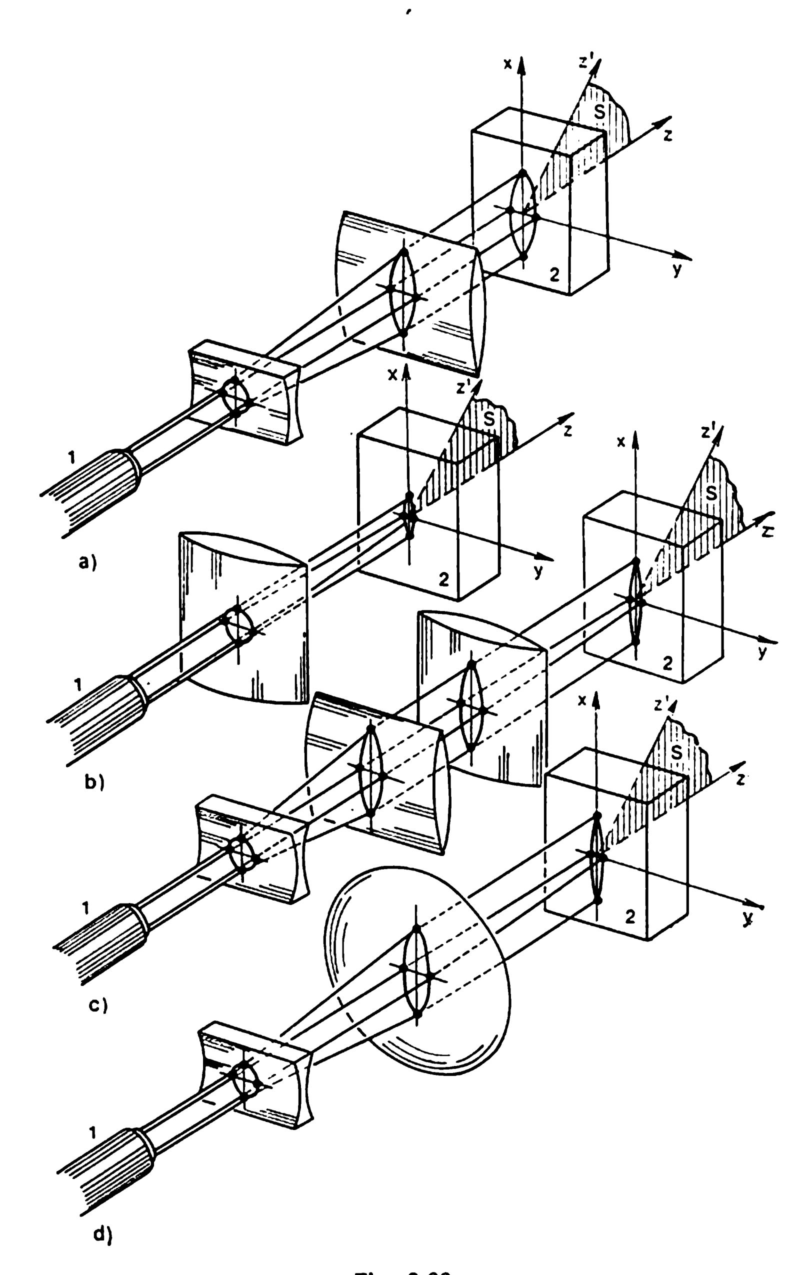


Fig. 3.29

sidéré, la divergence du faisceau ne diminue que dans le plan où cette diminution est importante au point de vue de la diminution du désaccord d'onde, ce qui permet d'éviter une augmentation superflue de la surface de la section transversale du faisceau et, comme conséquence, une réduction inutile de la densité de puissance de rayonnement.

Le schéma de la fig. 3.29, *b* sert à focaliser le faisceau sur le cristal non linéaire. Il utilise une lentille cylindrique convergente dont la génératrice est orientée le long de l'axe des x, c'est-à-dire parallèlement au plan de synchronisme. Grâce à une telle focalisation la divergence du faisceau n'augmente que dans le plan perpendiculaire au plan de synchronisme, ce qui est sans effet sur le désaccord d'onde. En même temps, la divergence du faisceau dans le plan de synchronisme, qui influe fortement sur le désaccord d'onde n'accuse dans ce cas aucune croissance.

Or, pour augmenter l'efficacité de la conversion, il est souhaitable que la divergence dans le plan de synchronisme non seulement *n'augmente pas* mais *diminue* (ce qui est surtout important lorsqu'on utilise des lasers à divergence relativement grande). C'est pourquoi il se trouve que le schéma optimal est celui de la fig. 3.29, *c* [32]. Il n'est pas difficile de voir que ce schéma n'est rien d'autre qu'une *combinaison* de deux précédents. Il comporte trois lentilles cylindriques. Deux lentilles (ayant leurs génératrices orientées suivant l'axe des y) servent à diminuer la divergence du faisceau dans le plan de synchronisme, c'est-à-dire à diminuer le désaccord d'onde. La densité de puissance de rayonnement devrait, certes, diminuer. Pourtant la troisième lentille (convergente, de génératrice orientée le long de l'axe des x) focalise le rayonnement sur le cristal non linéaire grâce à une augmentation, inessentielle au point de vue du désaccord d'onde, de la divergence du faisceau dans le plan perpendiculaire au plan de synchronisme.

La fig. 3.29, *d* donne un schéma *équivalent* au schéma de la fig. 3.29, *c*. Dans ce schéma les deux lentilles cylindriques convergentes, dont les génératrices sont perpendiculaires entre elles, sont remplacées par une lentille convergente sphérique [32]. Il est évident que ce schéma est plus simple que celui de la fig. 3.29, *c*.

Le schéma de la fig. 3.29, *c* (ou de la fig. 3.29, *d*) permet d'obtenir une relation *optimale*, du point de vue de l'efficacité de la conversion, entre la densité de puissance de rayonnement et sa divergence. En utilisant ce schéma, on a réussi à réaliser un coefficient de conversion de 65 % lors de la génération de deuxième harmonique à partir d'un laser à néodyme ayant une puissance de 20 MW/cm^2 et une divergence de 2 minutes d'angle. En l'absence du système de mise en forme, le coefficient de conversion n'était égal, dans les mêmes conditions, qu'à 6 % (v. [32]).

Circuits compensateurs de dispersion du synchronisme. — Ces

circuits sont utilisés dans le cas de la génération de deuxième harmonique à partir d'un rayonnement caractérisé par une très faible divergence et en même temps par une non-monochromaticité relativement élevée. La dispersion angulaire du synchronisme, qui se traduit par la variation de l'angle de synchronisme θ_s en fonction de la longueur d'onde λ émise, est compensée dans ces circuits grâce à la dispersion angulaire des éléments dispersifs spécialement choisis.

Avant de pénétrer dans le cristal non linéaire, le rayonnement interagit avec l'élément de dispersion, de sorte que le faisceau non monochromatique colinéaire (non divergent) se transforme en un

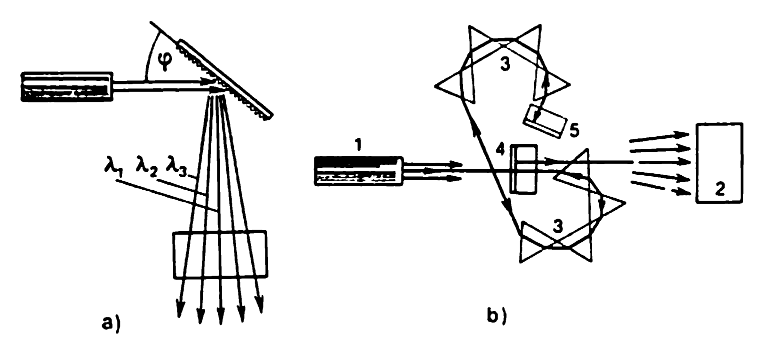


Fig. 3.30

ensemble de rayons partiels *monochromatiques* qui se propagent sous des *angles différents*. L'élément de dispersion est à choisir de telle sorte que ces angles correspondent aux *angles de synchronisme* pour des longueurs d'ondes correspondantes. En d'autres termes, la dispersion angulaire de l'élément doit être *égale* à la dispersion de l'angle de synchronisme dans le cristal non linéaire. Dans ce cas, *chacun* des rayons partiels monochromatiques se propagera dans le cristal sous l'angle de synchronisme. Il en résultera une augmentation, d'un ordre de grandeur, de l'efficacité de la conversion.

La fig. 3.30 donne deux schémas de la compensation de dispersion du synchronisme : *a*) utilisant, comme élément de dispersion, un *réseau de diffraction* [33] ; *b*) utilisant un *système de prismes* [34]. Le premier schéma n'exige aucune explication supplémentaire. Soulignons seulement que la dispersion angulaire du réseau $\partial\varphi/\partial\lambda$ doit être égale à la dispersion de l'angle de synchronisme $\partial\theta_s/\partial\lambda$ dans le cristal non linéaire.

Reportons-nous au deuxième schéma représenté sur la fig. 3.30, *b* dans laquelle *1* représente le laser, *2*, le cristal non linéaire, *3*, huit prismes de dispersion, *4* et *5*, les prismes à réflexion interne totale. Sans passer par le prisme *4* (grâce à une disposition convenable des prismes dans l'espace) le faisceau laser entre dans le système de pri-

smes, traverse tous les huit prismes, se réfléchit sur le prisme *5* pour traverser de nouveau tous les huit prismes et, en se réfléchissant sur le prisme *4*, pénètre dans le cristal non linéaire (après la réflexion sur le prisme *4* le rayonnement ne passe pas par le système de prismes de dispersion).

Schémas à cristaux non linéaires placés en série. — On sait que pour élever l'efficacité de la conversion il est souhaitable d'augmenter la longueur du cristal non linéaire. Mais l'augmentation de la longueur du cristal s'accompagne de phénomènes défavorables pour l'efficacité de la conversion. Ainsi, lorsque la longueur du cristal

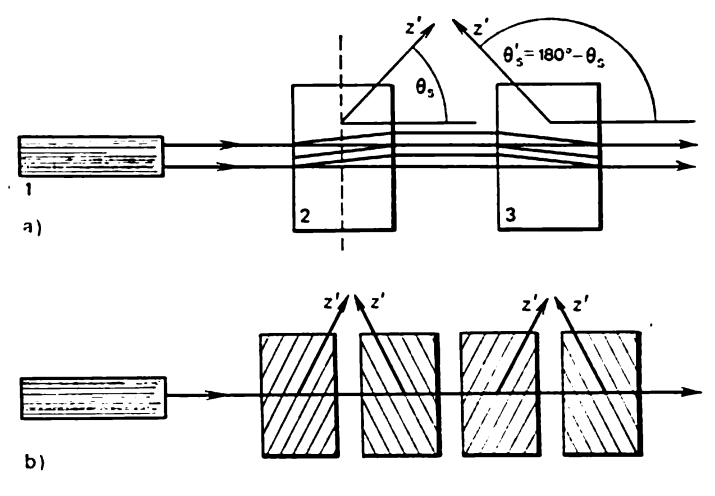


Fig. 3.31

augmente, l'effet d'ouverture de diaphragme devient plus marqué (diminution de l'efficacité de la conversion par suite du décalage d'énergie de l'onde extraordinaire; v. § 2.7), il se produit un *transfert inverse de l'énergie*: de l'onde du deuxième harmonique à l'onde fondamentale (v. par exemple fig. 1.6). Pour empêcher ces phénomènes de se produire, il convient de ne pas augmenter simplement la longueur du cristal mais d'utiliser des schémas spéciaux comportant deux ou plusieurs cristaux placés l'un après l'autre.

La fig. 3.31, *a* montre un schéma utilisant deux cristaux non linéaires. On y voit: *1*, le laser; *2* et *3*, les cristaux non linéaires; *z'*, l'axe optique du cristal. Le cristal *3* correspond au cristal *2* tourné de 180° autour de l'axe vertical (sur la figure cet axe est représenté par la droite en traits interrompus). Dans ce schéma, le décalage latéral de l'énergie de l'onde extraordinaire dans le cristal *2* est « compensé » par le décalage dans le cristal *3*.

Un schéma de la compensation de décalage peut contenir un grand nombre de cristaux convenablement orientés l'un par rapport à l'autre, v. fig. 3.31, *b*. La longueur de chacun des cristaux doit être inférieure à la longueur d'ouverture L_β. Dans de telles conditions, le décalage n'arrive pas en fait à se manifester sur la longueur

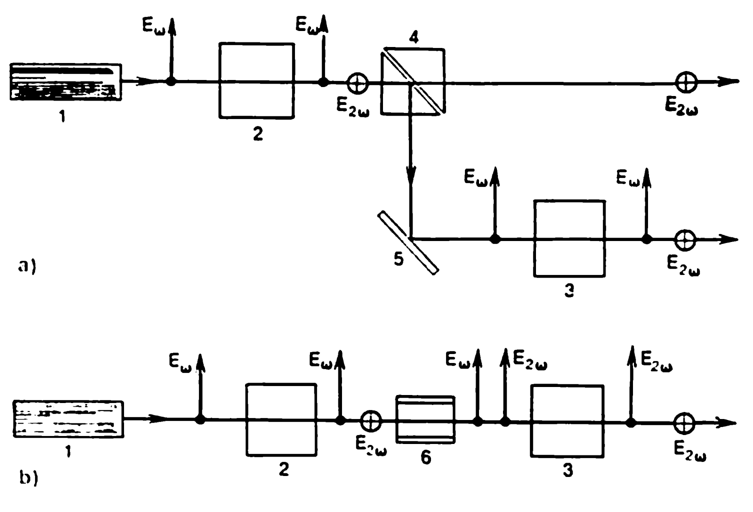


Fig. 3.32

d'un cristal distinct. Quant à l'accumulation de cet effet sur la chaîne de cristaux, elle ne peut pas se produire, car les cristaux pairs jouent le rôle de « compensateurs » de cet effet par rapport aux cristaux impairs.

Pour supprimer le processus concurrent de transfert inverse de l'énergie du deuxième harmonique à l'onde fondamentale on peut recourir aux schémas de la fig. 3.32 dans lesquels *1* représente un laser émettant un rayonnement à polarisation rectiligne de fréquence ω ; *2* et *3*, les cristaux non linéaires ; *4*, un prisme de Glan ; *5*, un miroir réfléchissant, *6*, un commutateur de polarisation spécial. Les flèches indiquent que l'onde correspondante est polarisée dans le plan de la figure, et les croix encerclées signifient que l'onde est polarisée perpendiculairement au plan de la figure (notons que dans ce cas le plan de la figure est perpendiculaire au plan de synchronisme). On suppose que dans chaque cristal le transfert inverse de l'énergie au deuxième harmonique n'a pas le temps de commencer. Rappelons que nous considérons l'interaction *ooe*.

Dans le schéma de la fig. 3.32, *a*, le deuxième harmonique, qui prend naissance dans le cristal *2*, *est éliminé* du processus d'interaction (étant sorti du schéma optique), de sorte que la génération de

deuxième harmonique dans le cristal *3* commence *à nouveau*. Cette sortie du deuxième harmonique effectuée par le prisme *4* de Glan repose sur le fait que les polarisations des ondes de fréquence fondamentale et du deuxième harmonique sont perpendiculaires l'une à l'autre. Le nombre d'étages (de cristaux non linéaires) utilisés dans un tel schéma peut être bien élevé.

Le shéma de la fig. 3.32, *b* est analogue à celui de la fig. 3.32, *a*. La seule différence tient à ce que le deuxième harmonique produit dans le cristal *2* est éliminé du processus d'interaction non pas par sa sortie du schéma mais grâce à la rotation de 90° de son plan de polarisation. Cette rotation est assurée par le commutateur *6* qui se caractérise par la dispersion de rotation du plan de polarisation. On fait varier la longueur de ce commutateur pour que la polarisation du deuxième harmonique à sa sortie coïncide avec celle de l'onde fondamentale. Il est évident que le deuxième harmonique polarisé dans le plan de synchronisme passera par le cristal *3* sans participer à l'interaction si bien que la génération de deuxième harmonique dans le cristal *3* recommence à nouveau.

Le processus de transfert inverse de l'énergie du deuxième harmonique peut être également supprimé par une orientation relative convenable de deux cristaux non linéaires. Cette question a été étudiée dans l'ouvrage [35], où l'on considère quatre variantes de l'orientation mutuelle des cristaux représentées sur la fig. 3.33, *a*. La résolution sur ordinateur des équations (2.4.1) a permis de construire pour ces variantes les courbes de synchronisme I_2 (Δk) montrées à la fig. 3.33, *b*. Aux fins de comparaison, on a porté sur la même figure la courbe de variation de I_2 en fonction de Δk pour un seul cristal. On voit que c'est la variante *III* qui est la meilleure pour une duplication efficace de fréquence. Dans ce cas, le processus de transfert inverse de l'énergie est fortement supprimé dans le deuxième cristal pour une large gamme de valeurs de Δk.

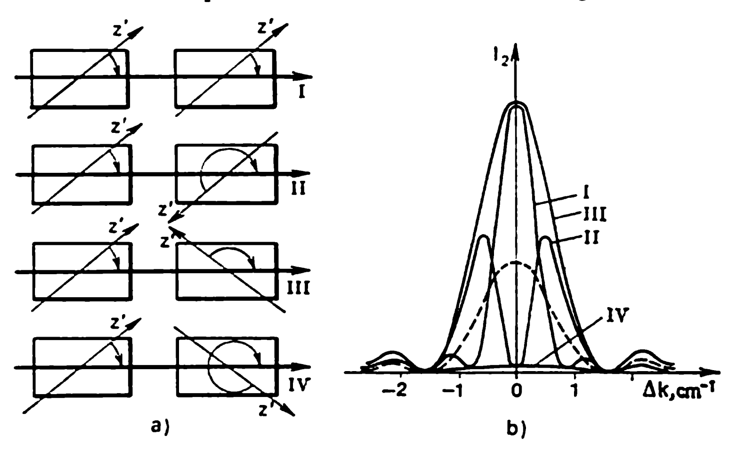


Fig. 3.33

Schémas à plusieurs parcours. — En utilisant de gros cristaux homogènes légèrement non linéaires (par exemple, les cristaux de KDP), on peut augmenter la longueur effective du cristal non linéaire en employant un *schéma à plusieurs parcours.* Un tel schéma est montré à la fig. 3.34, *a*. Dans cette figure, *1* représente le laser, *2*, le

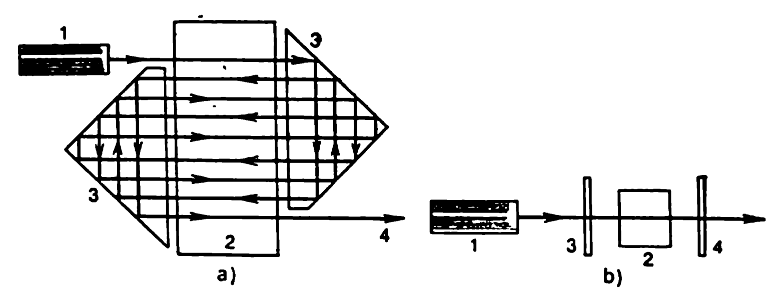


Fig. 3.34

cristal non linéaire, *3*, les réflecteurs en coin, *4*, le rayonnement de sortie. Le schéma représenté sur cette figure est à neuf parcours: grâce à des réflexions multiples le rayonnement traverse le cristal neuf fois.

Une modification du schéma à plusieurs parcours est constituée par le schéma de la génération de deuxième harmonique dans une cavité passive représenté par la fig. 3.34, *b*. On distingue sur cette

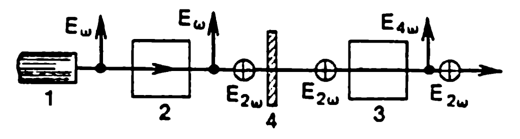


Fig. 3.35

figure: *1*, le laser; *2*, le cristal non linéaire; *3*, le miroir de gauche de la cavité passive (il est transparent au rayonnement de fréquence fondamentale et opaque à celui du deuxième harmonique); *4*, le miroir de droite (il est transparent au rayonnement de fréquence fondamentale et présente un coefficient de réflexion optimal à la fréquence du deuxième harmonique). Pour le calcul d'un tel schéma voir par exemple [36].

Schéma de la génération de quatrième harmonique. — Le quatrième harmonique peut s'obtenir par duplication de la fréquence du deuxième harmonique. A cet effet, on peut utiliser le schéma représenté sur la fig. 3.35 (synchronisme *ooe*) dans laquelle *1* représente un laser émettant un rayonnement à polarisation rectiligne de fréquence ω; *2*, le cristal non linéaire au sein duquel est créé le deuxiè-

me harmonique; *3*, le cristal non linéaire dans lequel est produit le quatrième harmonique; *4*, un filtre qui laisse passer le rayonnement de fréquence 2ω mais fait obstacle au passage du rayonnement de fréquence ω (pour éviter le chauffage du cristal *3*). Les plans de synchronisme des cristaux sont *perpendiculaires entre eux*. C'est une condition nécessaire pour que dans le cristal *2* se déroule le processus $\omega + \omega \rightarrow 2\omega$, et dans le cristal *3*, le processus $2\omega + 2\omega \rightarrow 4\omega$.

Pour l'obtention du quatrième harmonique par le doublage de la fréquence du deuxième harmonique, on peut utiliser les mêmes schémas de la formation du faisceau de rayonnement fondamental que lors de la génération de deuxième harmonique.

Génération de deuxième harmonique utilisant le synchronisme vectoriel. — Pour pouvoir utiliser le synchronisme vectoriel il est nécessaire d'obtenir deux faisceaux de rayonnement fondamental qui

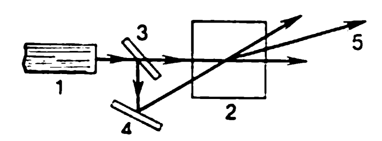


Fig. 3.36

se propagent sous un angle bien déterminé l'un par rapport à l'autre. On peut le faire à l'aide du schéma donné par la fig. 3.36 dans laquelle *1* représente le laser; *2*, le cristal non linéaire; *3*, le diviseur de faisceau ; *4*, le miroir réfléchissant; *5*, le faisceau de deuxième harmonique.

Les schémas utilisant le synchronisme vectoriel peuvent servir à la suppression ou tout au moins à l'affaiblissement de l'effet d'ouverture de diaphragme [37]. Rappelons que l'influence du décalage de l'énergie de l'onde extraordinaire est surtout indésirable lors de l'interaction *oee* parce qu'elle entraîne dans ce cas le décalage tant de l'onde du deuxième harmonique que d'une des ondes de fréquence fondamentale (v. § 2.7). Pour l'interaction *oee scalaire*, tous les trois vecteurs d'onde ($\mathbf{k}_1^o$, $\mathbf{k}_1^e$, $\mathbf{K}^e$) ont une même direction. Le vecteur de rayon $\mathbf{S}_1^o$ a la même direction, alors que le vecteur de rayon $\mathbf{S}_1^e$ fait avec cette direction l'angle β_1, et le vecteur de rayon $\mathbf{S}_2$, l'angle β_2 (v. fig. 3.37, *a*). Faisons tourner le vecteur d'onde $\mathbf{k}_1^e$ sur la figure de l'angle β_1 dans le sens des aiguilles d'une montre; dans ce cas, le vecteur de rayon correspondant (le vecteur $\mathbf{S}_1^e$) tournera du même angle et sera confondu avec le vecteur de rayon $\mathbf{S}_1^o$ (v. fig. 3.37, *b*). La somme vectorielle $\mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_1^e$ déterminera la nouvelle direction du vecteur $\mathbf{K}^e$; l'angle que font entre eux les vecteurs $\mathbf{K}^e$ et $\mathbf{k}_1^o$ sera désigné par γ. Etant donné la nouvelle direction du vecteur $\mathbf{K}^e$, le vecteur de rayon $\mathbf{S}_2$ fera maintenant avec le vecteur $\mathbf{S}_1^o$ l'angle $\beta_2 - \gamma$.

Si. dans la fig. 3.37, *a*, les vecteurs d'onde sont colinéaires et les vecteurs de rayon non colinéaires, dans la fig. 3.37, *b*. au contraire, les vecteurs d'onde sont non colinéaires alors que les vecteurs de rayon S_1^o et S_1^e sont colinéaires.

Ainsi, en passant du synchronisme *oee scalaire* au synchronisme *vectoriel*, on peut *amener les vecteurs de rayon* S_1^o *et* S_1^e *à coïncider* (et, en outre, approcher le vecteur de rayon S_2). En d'autres termes, l'utilisation du *synchronisme vectoriel* permet dans ce cas d'éliminer

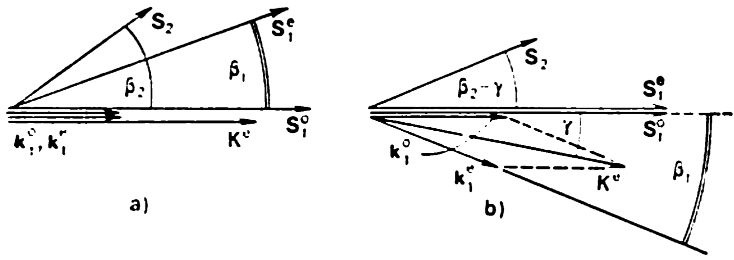


Fig. 3.37

le décalage de l'onde extraordinaire de fréquence fondamentale et en même temps de diminuer le décalage de l'onde du deuxième harmonique.

Notons que dans le cas de l'interaction *oee* il faut avoir deux ondes de fréquence fondamentale à polarisations *différentes*. Aussi, le vecteur intensité E_1 du champ de rayonnement laser rectilignement polarisé doit-il être au préalable décomposé en deux composantes perpendiculaires l'une à l'autre. A cet effet, il suffit d'orienter le cristal de telle sorte que le plan de synchronisme fasse un angle de 45° avec le plan de polarisation du rayonnement laser.

Bibliographie

1. **Ахманов С. А., Чиркин А. С.** Статистические явления в нелинейной оптике. — М.: МГУ. 1971.
2. **Кузьминов Ю. С.** Ниобат и танталат лития (материалы для нелинейной оптики). — М.: Наука, 1975.
3. **Бутягин О. Ф., Ваксман В. М., Казаков А. А., Швом Е. М.** Влияние линейной неоднородности среды на генерацию второй гармоники в нелинейном режиме. — Квантовая электроника, 1974, т. I, № 4.
4. **Тагиев З. А., Чиркин А. С.** Об эффективности преобразования оптических частот в неоднородных нелинейных средах. — Квантовая электроника, 1977, т. 4, № 7.
5. **Janke E., Emde F., Lösch F.** Tafeln höherer Funktionen. — Stutgart, Teubner, 1960.
6. **Иванова З. И., Холодных А. И.** Влияние оптических неоднородностей на эффективную длину нелинейных кристаллов. — Квантовая электроника, 1980, т. 7, № 3.

7. **Tarassov L.** Physique des processus dans les générateurs de rayonnement optique cohérent. — Moscou, Editions Mir, 1985.
8. **Дмитриев В. Г., Ицхоки И. Я.** Оптические умножители частоты. — В кн.: Справочник по лазерам в 2-х т./Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Сов. радио, 1978. — Т. 2.
9. **Сухоруков А. П., Фельд С. Я., Хачатрян А. М., Шумилов Э. Н.** Стационарная тепловая самофокусировка лазерных пучков. В кн.: Квантовая электроника/Под ред. Н. Г. Басова. — М.: Сов. радио, 1972, вып. 2.
10. **Юдаев Б. Н.** Теплопередача. — М.: Высшая школа, 1973.
11. **Okada M., Ieiri S.** Influences of self-induced thermal effects on phase-matching in nonlinear optical crystals. — IEEE, 1971, v. QE-7, n° 12.
12. **Михина Т. В., Сухоруков А. П., Томов И. В.** Влияние тепловых самовоздействий на протекание когерентных нелинейных оптических процессов. — Ж. прикл. спектр. 1971, т. 15.
13. **Brugger K.** Exact solutions for the temperature rise in a laser-heated slab. — J. Appl. Phys., 1972, v. 43, n° 2.
14. **Дмитриев В. Г., Коновалов В. А., Шалаев Е. А.** К теории теплового самовоздействия при генерации второй гармоники в нелинейных кристаллах. — Квантовая электроника 1975, т. 2, № 3.
15. **Дмитриев В. Г., Злодеев А. Г., Коновалов В. А., Шалаев Е. А.** Гистерезис температурной кривой синхронизма. — Квантовая электроника, 1979, т. 6, № 12.
16. **Дмитриев В. Г., Чередниченко О. Б.** Перестраиваемые лазеры с импульсной накачкой. — Изв. АН СССР. Сер. Физическая, 1980, т. 44, № 8.
17. **Лохов Ю. Н., Моспанов В. С., Фивейский Ю. Д.** Предельная длительность импульса при ГВГ в кристалле KDP — В кн.: Квантовая электроника/Под ред. Н. Г. Басова. — М.: Сов. радио, 1972, вып. 2.
18. **Маймистов А. И., Малов Л. Р., Маныкин Э. А.** Генерация гармоник в условиях двухквантового резонанса. — Квантовая электроника, 1975, т. 2, № 4.
19. **Дмитриев В. Г., Коновалов В. А.** Влияние двухфотонного поглощения излучения на генерацию второй гармоники в кристаллах. — Квантовая электроника, 1979, т. 6, № 3.
20. **Tarassov L.** Bases physiques de l'électronique quantique (domaine optique). — Moscou, Editions Mir, 1979.
21. **Фридкин В. М.** Фотосегнетоэлектроники. — М.: Наука, 1979.
22. **Дмитриев В. Г., Коновалов В. А., Шалаев Е. А.** Влияние наведенной оптической неоднородности показателя преломления на генерацию второй гармоники в кристаллах метаниобата лития. — Квантовая электроника, 1979, т. 6, № 3.
23. **Ханин Я. И.** Динамика квантовых генераторов. — М.: Сов. радио, 1975.
24. **Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П.** Ограничение эффективности удвоителей частоты пикосекундных импульсов света. — Квантовая электроника, 1975, т. 2, № 5.
25. **Akhmanov S. A., Kovrygin A. I., Sukhorukov A. P.** Optical harmonic generation and optical frequency multipliers. — In: Quantum electr.: A treatise, Acad. Press, INC, 1975, v. 1.
26. **Кабелка В. И., Пискарскас А. С., Стабинис А. Ю., Шер Р. Л.** Групповой синхронизм взаимодействующих сверхкоротких световых импульсов в нелинейных кристаллах. — Квантовая электроника, 1975, т. 2, № 2.
27. **Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Чиркин А. С.** Нестационарные явления и пространственно-временная аналогия в нелинейной оптике. — ЖЭТФ, 1968, т. 55, № 4.
28. **Дмитриев В. Г., Суков А. И., Шалаев Е. А.** Влияние частичной синхронизации мод на процесс генерации второй гармоники. — Квантовая электроника, 1979, т. 6, № 4.
29. **Ахманов С. А., Хохлов Р. В.** О пространственно-временной аналогии

в теории систем с переменными параметрами. — Радиотехника и электроника, 1962, т. 7, № 8.
30. **Рябов С. Г., Торопкин Г. Н., Усольцев И. Ф.** Приборы квантовой электроники. — М.: Сов. радио, 1976.
31. **Волосов В. Д., Ращектаева М. И.** Высокоэффективное преобразование во вторую гармонику излучения лазера на неодимовом стекле. — Оптика и спектроскопия, 1970, т. 28, № 1.
32. **Ванюков М. П., Волосов В. Д.** Методы расчета и конструирования высокоэффективных генераторов оптических гармоник. — В кн.: Лазеры и их применение. — Дрезден, 1970.
33. **Волосов В. Д., Горячкина Е. В.** Компенсация дисперсии синхронизма при генерации гармоник немонохроматического излучения. — Квантовая электроника, 1976, т. 3, № 7.
34. **Волосов В. Д., Карпенко С. Г., Корниенко Н. Е., Стрижевский В. Л.** Метод компенсации дисперсии фазового синхронизма в нелинейной оптике. — Квантовая электроника, 1974, т. 1, № 9.
35. **Волосов В. Д., Калинцев А. Г., Крылов В. Н.** Вырожденные параметрические процессы при трехволновых взаимодействиях в последовательно расположенных кристаллах. — Письма в ЖТФ, 1976, т. 2, № 2.
36. **Ахманов С. А., Дмитриев В. Г., Моденов В. П.** К теории умножения частоты в резонаторе, заполненном нелинейной средой. — Радиотехника и электроника, 1965, т. 10, № 4.
37. **Лугина А. С., Белый В. Н., Писарова Н. И., Уварова Н. Н., Хаткевич А. Г.** Эффективная внутрирезонаторная генерация второй гармоники. — Квантовая электроника, 1978, т. 5, № 7.

CHAPITRE 4

GÉNÉRATION DE DEUXIÈME HARMONIQUE À L'INTÉRIEUR DE LA CAVITÉ RÉSONNANTE

§ 4.1. Introduction

Lasers à génération intracavité de deuxième harmonique (en abrégé GICDH). — En étudiant, au cours des chap. 2 et 3, la génération de deuxième harmonique, nous supposions qu'un certain laser émettait un rayonnement à la fréquence fondamentale et ensuite ce rayonnement pénétrait dans un cristal non linéaire où prenait naissance le deuxième harmonique. Dans ce chapitre va être étudiée une situation qualitativement différente, lorsque le cristal non linéaire est placé *à l'intérieur* de la cavité laser. On dit alors que l'on a affaire à une *génération intracavité de deuxième harmonique*. L'élément actif au sein duquel est produit le rayonnement à la fréquence fondamentale et le cristal non linéaire dans lequel ce rayonnement est converti en deuxième harmonique se trouvent placés maintenant à l'intérieur d'une cavité *commune*. De ce fait, les processus de production de rayonnement laser et de sa conversion en deuxième harmonique ne peuvent pas être examinés séparément l'un de l'autre. L'émission du rayonnement à la fréquence fondamentale et la conversion de ce rayonnement en deuxième harmonique est maintenant un processus unique.

On sait que les lasers à pompage continu et surtout les lasers émettant en régime stationnaire se caractérisent par une faible valeur du coefficient optimal de transparence du miroir de sortie; dans de tels lasers la puissance du rayonnement de sortie est nettement inférieure à la puissance de rayonnement à l'intérieur de la cavité. Ainsi, pour une transparence optimale de 4 % la puissance de sortie est 25 fois plus petite que la puissance à l'intérieur de la cavité. Comme le coefficient de conversion en deuxième harmonique dépend essentiellement de la puissance du rayonnement à la fréquence fondamentale, il est évidemment raisonnable de placer dans de tels cas le cristal non linéaire à l'intérieur de la cavité laser.

Pour les lasers à pompage *continu* la GICDH permet d'améliorer sensiblement l'efficacité de la conversion en deuxième harmonique [1] à [3]. Dans ce cas les pertes nuisibles dans le cristal non linéaire doivent être suffisamment faibles pour ne pas affecter le

régime d'oscillation du laser; le miroir de sortie doit avoir une haute réflexion (près de 100 %) à la fréquence fondamentale et une haute transparence à la fréquence du deuxième harmonique. Pour élever l'efficacité de la conversion, on utilise la focalisation intracavité du rayonnement fondamental sur le cristal non linéaire.

Pour les lasers pompés *par impulsion*, le rapport de la puissance intracavité à la puissance optimale de sortie n'est pas si élevé que dans les lasers à pompage continu. Cependant, l'utilisation de la GICDH dans de tels lasers présente également un intérêt pratique considérable parce qu'elle permet d'allonger les impulsions émises de stabiliser le régime de fonctionnement, etc. [4], [5].

Charge non linéaire de la cavité. — Comparons un laser émettant uniquement sur la fréquence fondamentale à un laser fonctionnant en régime de GICDH lorsque le rayonnement fondamental ne quitte pas la cavité. Dans le premier laser, le miroir de sortie peut être considéré comme une charge de la cavité. On convient de dire que ce miroir assure le couplage de la cavité avec l'espace extérieur. Plus grand est le coefficient de transparence $1 - R_1$ du miroir, plus fort est ce couplage, plus « ouverte » est la cavité optique (plus petit est son coefficient de surtension). La charge considérée est *linéaire* parce que le coefficient de réflexion R_1 du miroir est indépendant de la puissance de rayonnement.

Dans le second laser, le couplage de la cavité avec l'extérieur s'effectue par génération de deuxième harmonique dans le cristal non linéaire placé à l'intérieur de la cavité. Au lieu de la sortie du rayonnement fondamental à travers le miroir de sortie (à coefficient de transparence $1 - R_1$), on a ici affaire à la conversion du rayonnement fondamental en deuxième harmonique (avec le coefficient de conversion η) qui est ensuite librement émis de la cavité. Le miroir de sortie est opaque à la fréquence fondamentale mais transparent à la fréquence du deuxième harmonique: $R_1 = 1$, $R_2 = 0$. Puisque l'efficacité de la conversion dépend de la puissance du rayonnement fondamental, la charge de la cavité est dans ce cas *non linéaire*. C'est ainsi que lorsque la puissance du rayonnement fondamental augmente, le coefficient de conversion devient plus grand, et donc la cavité devient plus « ouverte » (son facteur de surtension à la fréquence fondamentale diminue).

Le caractère non linéaire de la charge de la cavité (la non-linéarité des pertes utiles) influe de façon substantielle sur la dynamique des processus intervenant dans le laser [2], [6]. Si par exemple la répartition transversale de la puissance du rayonnement fondamental à l'intérieur de la cavité $P_1(x, y)$ est *inhomogène*, les pertes liées à la génération de deuxième harmonique seront elles aussi inhomogènes, ce qui aura une répercussion sur la formation de la structure des modes et du spectre du rayonnement de sortie. Dans le cas d'un rayonnement fondamental multimode, les modes laser peuvent

subir des *influences mutuelles* par l'intermédiaire de la génération de deuxième harmonique. En particulier, la GICDH peut influer substantiellement sur le régime d'autoverrouillage des modes [7]. La GICDH modifie les caractéristiques de *stabilité* du rayonnement laser du fait qu'elle fait apparaître une sorte d'action en retour. Cette rétroaction peut stabiliser le régime d'oscillation [8], [9]. En effet, une diminution accidentelle de la puissance intracavité P_1 entraîne une diminution du coefficient de conversion η, le coefficient de surtension de la cavité à la fréquence fondamentale s'accroît, ce qui provoque une croissance de P_1. Au contraire, si P_1 augmente, le coefficient de conversion η (et donc les pertes) augmente, provoquant une diminution de P_1. D'un autre côté, le placement du cristal non linéaire à l'intérieur de la cavité laser peut provoquer l'apparition des fluctuations complémentaires de la puissance du rayonnement émis, liées à des fluctuations dites excédentaires qui prennent naissance lors de la génération de deuxième harmonique en régime multimode. L'interaction non linéaire des modes peut conduire à l'apparition de fortes fluctuations à la fréquence d'oscillations de relaxation de la cavité laser [10].

Régime optimal de GICDH. — On sait (v. par exemple § 2.2 de [11]) que, pour obtenir un maximum de puissance de sortie dans un laser ordinaire, il faut utiliser un miroir de sortie à *coefficient de transparence optimal* $1 - R_{1\,opt}$. Dans le cas d'un laser à GICDH, il est nécessaire que soit optimal le *coefficient de conversion* en deuxième harmonique η_{opt} qui doit satisfaire à la condition

$$\eta_{opt} = 1 - R_{1\,opt}, \qquad (4.1.1)$$

où $R_{1\,opt}$ est le coefficient optimal de réflexion du miroir de sortie d'un laser sans GICDH utilisant le même élément actif et présentant les mêmes pertes nuisibles que le laser à GICDH. La puissance de sortie maximale à la fréquence fondamentale du laser sans GICDH a pour valeur

$$P_{1\,max} = (1 - R_{1\,opt})\, P_1. \qquad (4.1.2)$$

La puissance de sortie maximale à la fréquence du deuxième harmonique du laser à GICDH s'exprime par

$$P_{2\,max} = \eta_{opt}\, P_1. \qquad (4.1.3)$$

Le rapprochement entre (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.3) montre que

$$P_{2\,max} = P_{1\,max}. \qquad (4.1.4)$$

Si la relation (4.1.1), et donc l'égalité (4.1.4), est réalisée, on dit que le *régime de GICDH* est *optimal*. Ayant en vue la relation (4.1.4), on utilise également le terme de *régime de conversion à 100 %*. On ne saurait considérer ce terme comme heureux parce qu'en réalité l'efficacité de la génération de deuxième harmonique à l'intérieur de

la cavité ne dépasse pas 20 à 30 % pour les lasers pulsés et 5 à 10 % pour les lasers continus.

Le régime optimal de GICDH est un régime auquel un laser utilisant des miroirs non transparents à la fréquence fondamentale fournit à la fréquence du deuxième harmonique la même puissance de sortie qui serait développée par le même laser à la fréquence fondamentale si le cristal non linéaire placé à l'intérieur de la cavité était mis hors de synchronisme (la charge non linéaire était « débranchée ») et le miroir de sortie présentait une transparence optimale à la fréquence fondamentale.

Régimes de sous-conversion et de surconversion. — Si

$$\eta < \eta_{opt} \tag{4.1.5}$$

on parle du régime de sous-conversion. Dans ce cas, les pertes liées à la génération de deuxième harmonique sont insuffisantes pour charger de façon optimale la cavité laser; la puissance de sortie du deuxième harmonique $P_{2\,sor}$ se trouve inférieure à $P_{2\,max}$. Un tel laser est analogue à un laser sans GICDH utilisant un miroir de sortie caractérisé par un coefficient de réflexion très élevé ($R_1 > > R_{1\,opt}$).

Si

$$\eta > \eta_{opt}, \tag{4.1.6}$$

on parle du régime de surconversion. Dans le laser fonctionnant en un tel régime les pertes liées à la génération de deuxième harmonique sont trop élevées, ce qui conduit à une baisse considérable du facteur de surtension de la cavité à la fréquence fondamentale. Dans le cas de la surconversion, de même que dans celui de la sous-conversion, $P_{2\,sor} < P_{2\,max}$. Le laser fonctionnant en régime de surconversion est analogue à un laser sans GICDH utilisant un miroir de sortie caractérisé par un coefficient de transparence très grand ($R_1 < R_{1\,opt}$).

§ 4.2. GICDH stationnaire [1]

Schéma du laser à GICDH. — Il est donné à la fig. 4.1 dans laquelle *1* représente l'élément actif, *2*, le cristal non linéaire, *3* et *4*, les miroirs de la cavité déposés directement sur les faces terminales de l'élément actif et du cristal non linéaire, l, la longueur du cristal non linéaire, L, la longueur de l'élément actif ($l \ll L$). Le coefficient de réflexion du miroir *3* sera noté R_1 (0) pour le rayonnement à la fréquence fondamentale et R_2 (0) pour celui du deuxième harmonique; de même, pour le miroir *4* utilisons les désignations $R_1 (L + l)$ et $R_2 (L + l)$. En étudiant le régime *stationnaire* de GICDH, désignons par $S_1^{\pm}(z)$ et $S_2^{\pm}(z)$ la densité de puissance en un

[1]) Pour l'étude de la GICDH au régime stationnaire, voir par exemple [2], [8], [12], [13].

point z respectivement pour les rayonnements aux fréquences fondamentale et harmonique qui se propagent dans le sens des z positifs. Pour les rayonnements se propageant dans le sens des z négatifs seront utilisées les désignations $S_1^-(z)$ et $S_2^-(z)$.

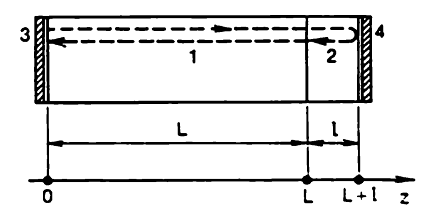


Fig. 4.1

Par suite du passage à travers l'élément actif la densité de puissance du rayonnement fondamental s'accroît. En utilisant la loi différentielle de Buger (v. par exemple § 3.2 de [15])

$$dS_1^{\pm} = \pm [\varkappa(z) - \rho] S_1^{\pm}(z)\, dz, \tag{4.2.1}$$

où $\varkappa(z)$ et ρ sont les coefficients d'amplification et de pertes nuisibles dans l'élément actif, on obtient

$$S_1^+(L) = S_1^+(0) \exp [L(\langle\varkappa\rangle - \rho)]; \tag{4.2.2a}$$

$$S_1^-(0) = S_1^-(L) \exp [L(\langle\varkappa\rangle - \rho)]. \tag{4.2.2b}$$

Le signe $\langle \ldots \rangle$ désigne une moyenne sur la longueur de l'élément actif :

$$\langle\varkappa\rangle = \frac{1}{L} \int_0^L \varkappa(z)\, dz. \tag{4.2.3}$$

Par suite du passage dans le cristal non linéaire le rayonnement fondamental est partiellement converti en deuxième harmonique. A l'approximation des ondes planes et à celle du champ constant du rayonnement fondamental, lorsque la condition de synchronisme est satisfaite, on a [v. (2.4.46)]

$$S_2^+(L+l) = \gamma [S_1^+(L)]^2; \tag{4.2.4a}$$

$$S_2^-(L) = \gamma [S_1^-(L+l)]^2, \tag{4.2.4b}$$

avec

$$\gamma = 8\pi n_1'(2\omega) (\sigma_2 l)^2 / cn^2(\omega). \tag{4.2.5}$$

Miroir non linéaire. — Le rayonnement fondamental venant de la gauche tombe sur le cristal non linéaire avec une densité de puissance $S_1^+(L)$. Après la traversée du cristal non linéaire, la densité de puissance diminue de $\gamma [S_1^+(L)]^2$ si l'on néglige l'absorption de

rayonnement dans ce cristal. Ainsi.

$$S_1^+(L+l) = S_1^+(L)\,[1-\gamma S_1^+(L)]. \qquad (4.2.6)$$

Après la réflexion sur le miroir *4* on a

$$S_1^-(L+l) = R_1(L+l)\,S_1^+(L+l). \qquad (4.2.7)$$

Après un deuxième passage dans le cristal non linéaire on obtient

$$S_1^-(L) = S_1^-(L+l)\,[1-\gamma S_1^-(L+l)]. \qquad (4.2.8)$$

Le rapport

$$S_1^-(L)/S_1^+(L) \equiv R_{1nl} \qquad (4.2.9)$$

peut être considéré comme un coefficient de réflexion du rayonnement fondamental sur la face terminale de droite de l'élément actif. En utilisant les relations (4.2.6) à (4.2.8), on trouve pour ce coefficient l'expression suivante:

$$\boxed{R_{1nl} = R_1(L+l)\,\{1-\gamma\,[1+R_1(L+l)]\,S_1^+(L)\}.} \qquad (4.2.10)$$

Pour obtenir (4.2.10) nous avons négligé les termes en γ^2 et en γ^3 car en pratique

$$\gamma S_1^+ \leqslant 0{,}1. \qquad (4.2.11)$$

Ainsi, pour le rayonnement à la fréquence fondamentale le schéma de la fig. 4.1 peut être considéré comme un schéma comportant, à droite de l'élément actif, un *miroir non linéaire* dont le coefficient de réflexion se décrit en première approximation par la relation (4.2.10). La *non-linéarité* de ce « miroir » se manifeste par la variation de son coefficient de réflexion en fonction de la densité de puissance $S_1^+(L)$.

Si le rayonnement fondamental est confiné dans la cavité, c'est-à-dire si

$$R_1(L+l) = 1\,;\; R_1(0) = 1, \qquad (4.2.12)$$

l'expression (4.2.10) prend la forme -

$$\boxed{R_{1nl} = 1-2\gamma S_1^+(L).} \qquad (4.2.13)$$

Condition de génération stationnaire. — Parcourons la cavité en partant du miroir *3* comme l'indique la ligne en traits interrompus de la fig. 4.1. Faisons usage des relations (4.2.2) et (4.2.9) et introduisons la désignation

$$\exp[L\,(\langle\varkappa\rangle-\rho)] \equiv G. \qquad (4.2.14)$$

La densité de puissance initiale du rayonnement fondamental est $S_1^+(0)$. Après la traversée de l'élément actif on a $S_1^+(L) = GS_1^+(0)$. Puis le rayonnement se réfléchit sur le miroir non linéaire qui trans-

forme $S_1^+(L)$ en $S_1^-(L) = R_{1nl}S_1^+(L) = R_{1nl}GS_1^+(0)$. Un deuxième passage (dans le sens opposé) à travers l'élément actif donne $S_1^-(0) = GS_1^-(L) = R_{1nl}G^2S_1^+(0)$. Enfin, après la réflexion sur le miroir *3*, on obtient $R_1(0)R_{1nl}G^2S_1^+(0)$. Ceci termine le parcours de la cavité. Le caractère *stationnaire* du processus signifie que la densité de puissance initiale du rayonnement fondamental (avant le parcours) doit être égale à la densité de puissance finale (après le parcours). Ainsi

$$S_1^+(0) = R_1(0)\, R_{1nl}\, G^2 S_1^+(0)$$

ou encore

$$G^2 = [R_1(0)\, R_{1nl}]^{-1}. \qquad (4.2.15)$$

C'est cette relation qui traduit la *condition de génération stationnaire* dans un laser à GICDH.

En se servant de (4.2.14), on obtient

$$\langle \varkappa \rangle = \rho + (1/2L) \ln [1/R_1(0)\, R_{1nl}]. \qquad (4.2.16)$$

En tenant compte de (4.2.10), récrivons le résultat (4.2.16) sous la forme

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \varkappa \rangle &= \rho + (1/2L) \ln [R_1(0)\, R_1(L+l)]^{-1} - \\ &- (1/2L) \ln \{1 - \gamma [1 + R_1(L+l)]\, S_1^+(L)\}. \end{aligned}} \qquad (4.2.17)$$

Signalons que par ρ on entend les pertes nuisibles totales dans l'élément actif et dans le cristal non linéaire.

Si $\gamma = 0$ (le cristal non linéaire est hors de synchronisme), on obtient à partir de (4.2.17) la condition connue de génération stationnaire d'un laser sans GICDH:

$$\langle \varkappa \rangle = \rho + (1/2L) \ln [R_1(0)\, R_1(L+l)]^{-1}. \qquad (4.2.18)$$

Le coefficient d'amplification moyenné du laser sans GICDH est la somme du coefficient de pertes nuisibles ρ et du coefficient de pertes utiles (de rayonnement) $(1/2L) \ln [R_1(0)\, R_1(L+l)]^{-1}$. Dans le cas de la GICDH cette somme comporte un terme complémentaire qui est le *coefficient de pertes non linéaires*

$$\rho_{nl} = -(1/2L) \ln \{1 - \gamma [1 + R_1(L+l)]\, S_1^+(L)\}. \qquad (4.2.19)$$

Pour le rayonnement à la fréquence fondamentale les pertes non linéaires sont des pertes nuisibles. Mais au point de vue de l'obtention du deuxième harmonique ces pertes doivent être considérées comme utiles.

En utilisant la relation $\ln(1+\alpha) \approx \alpha$, qui est valable pour $\alpha \ll 1$, mettons (4.2.19) sous une forme plus simple

$$\rho_{nl} = (\gamma/2L)\, [1 + R_1(L+l)]\, S_1^+(L). \qquad (4.2.20)$$

Si l'on tient compte de (4.2.20), la condition de génération stationnaire (4.2.17) devient

$$\langle \varkappa \rangle = \rho + (1/2L) \ln [R_1 (0)\, R_1 (L + l)]^{-1} + (\gamma/2L) [1 + R_1 (L + l)]\, S_1^+ (L). \quad (4.2.21)$$

Pour élever la densité de puissance du rayonnement fondamental à l'intérieur de la cavité, il est rationnel d'éliminer les pertes par rayonnement à la fréquence fondamentale, c'est-à-dire d'assurer la réalisation des relations (4.2.12). Dans ce cas la condition de génération (4.2.21) peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{\langle \varkappa \rangle = \rho + (\gamma/L)\, S_1^+ (L).} \quad (4.2.22)$$

En étudiant au cours de ce paragraphe la GICDH stationnaire, nous supposerons que les relations (4.2.12) sont vérifiées.

Densité de puissance du deuxième harmonique. — Le rayonnement du deuxième harmonique est produit par deux ondes opposées du rayonnement fondamental et sort donc tant de la face terminale de droite que de la face terminale de gauche du cristal non linéaire. Supposons que le rayonnement *total* (dans les deux sens) du deuxième harmonique quitte la cavité *sans subir des pertes* et qu'il existe un certain dispositif qui réunit les deux ondes en une seule. Dans cette hypothèse, en utilisant (4.2.4) : écrivons pour la densité de puissance *de sortie* totale du deuxième harmonique l'expression suivante [1]) :

$$S_2 = 2\gamma [S_1^+ (L)]^2. \quad (4.2.23)$$

De (4.2.23) il résulte que le coefficient de conversion global (dans les deux sens) en deuxième harmonique en densité de puissance est de la forme

$$\eta_s = S_2/S_1^+ (L) = 2\gamma\, S_1^+ (L). \quad (4.2.24)$$

Le rapprochement entre (4.2.24) et (4.2.13) permet d'écrire la relation suivante [comparer à (4.1.1)] :

$$1 - R_{1\mathrm{nl}} = \eta_s. \quad (4.2.25)$$

Dans le cas où le rayonnement fondamental est confiné dans la cavité, le coefficient de transparence du miroir non linéaire est égal au coefficient de conversion en deuxième harmonique en densité de puissance.

Pour développer la relation (4.2.23) il faut trouver $S_1^+ (L)$. Utilisons à cet effet l'expression connue donnant le coefficient d'ampli-

[1]) En toute rigueur, S_2 dépend du déphasage des ondes opposées du deuxième harmonique [4]. Ici, nous ne tenons pas compte des relations de phase et supposons que lors de l'addition de deux faisceaux du deuxième harmonique ce sont leurs intensités qui s'additionnent.

fication (v. par exemple § 2.1 de [11]):

$$\varkappa(z) = \varkappa_0/[1 + \beta(S_1^+(z) + S_1^-(z))], \qquad (4.2.26)$$

où $\varkappa_0$ est le gain initial et β, le paramètre de non-linéarité. On déduit de (4.2.26) que

$$S_1^+(z) + S_1^-(z) = [\varkappa_0/\varkappa(z) - 1]/\beta. \qquad (4.2.27)$$

Si l'on prend la moyenne de cette expression sur la longueur de l'élément actif, on obtient

$$\langle S_1^+(z) + S_1^-(z)\rangle = [\varkappa_0\langle 1/\varkappa\rangle - 1]/\beta. \qquad (4.2.28)$$

En général, on peut considérer que

$$\langle 1/\varkappa\rangle \approx 1/\langle\varkappa\rangle. \qquad (4.2.29)$$

En outre, on peut poser

$$\langle S_1^+(z) + S_1^-(z)\rangle \approx 2S_1^+(L). \qquad (4.2.30)$$

En usant de (4.2.29) et (4.2.30), récrivons (4.2.28) sous la forme

$$\langle\varkappa\rangle = \varkappa_0/[1 + 2\beta S_1^+(L)]. \qquad (4.2.31)$$

En portant (4.2.31) dans (4.2.22), on obtient une équation du second degré par rapport à $S_1^+(L)$:

$$2\beta\gamma[S_1^+(L)]^2 + (2\beta\rho L + \gamma)S_1^+(L) - (\varkappa_0 - \rho)L = 0. \qquad (4.2.32)$$

La résolution de cette équation donne

$$S_1^+(L) = \frac{\sqrt{(2\beta\rho L + \gamma)^2 + 8\beta\gamma(\varkappa_0 - \rho)L} - (2\beta\rho + \gamma)}{4\beta\gamma}. \qquad (4.2.33)$$

Si l'on reporte la solution (4.2.33) dans l'expression (4.2.23), on obtient l'expression suivante pour la densité totale (dans les deux sens) de puissance de sortie du deuxième harmonique:

$$S_2 = \frac{[\sqrt{(2\beta\rho L + \gamma)^2 + 8\beta\gamma(\varkappa_0 - \rho)L} - (2\beta\rho L + \gamma)]^2}{8\beta^2\gamma}. \qquad (4.2.34)$$

La fig. 4.2 montre les courbes de variation de $\beta S_1^+(L)$ en fonction du paramètre $\xi = \gamma/2\beta\varkappa_0 L$, définie par la relation (4.2.33), pour différentes valeurs du rapport $\nu = \rho/\varkappa_0$ (courbe *1* pour $\nu = 0{,}5$, courbe *2* pour $\nu = 0{,}25$, courbe *3* pour $\nu = 0{,}1$ et courbe *4* pour $\nu = 0{,}025$). Les courbes de variation de $\beta S_2/\varkappa_0 L$ en fonction du paramètre ξ sont représentées, pour les mêmes valeurs du rapport ν, sur la fig. 4.3. On voit que la densité de puissance du rayonnement fondamental à l'intérieur de la cavité diminue lorsque le coefficient

de couplage non linéaire γ augmente. Quant à la densité de puissance de sortie du deuxième harmonique, elle augmente d'abord avec la croissance de γ pour commencer ensuite à diminuer. Le maximum de courbes de la fig. 4.3 correspond au régime optimal de GICDH.

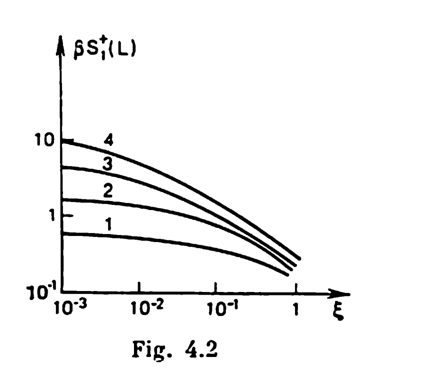


Fig. 4.2

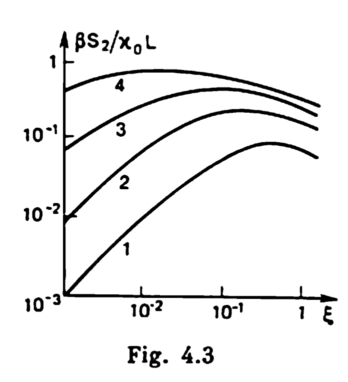


Fig. 4.3

GICDH stationnaire au régime optimal. — En dérivant la fonction $S_2(\gamma)$, définie par l'expression (4.2.34), et en annulant la dérivée, on trouve la valeur *optimale* du paramètre γ:

$$\gamma_{opt} = 2\beta\rho L, \tag{4.2.35}$$

pour laquelle S_2 est maximale. En introduisant (4.2.35) dans (4.2.34), on obtient

$$\boxed{S_{2max} = (\sqrt{\varkappa_0 L} - \sqrt{\rho L})^2/\beta.} \tag{4.2.36}$$

Une même expression décrit la densité de puissance maximale du rayonnement d'un laser sans GICDH à condition que le coefficient de réflexion du miroir de sortie soit optimal (v. par exemple § 2.1 de [11]). Ceci est en accord avec les remarques faites au § 4.1 à propos du régime optimal de GICDH.

En introduisant (4.2.5) dans (4.2.35), on trouve l'expression pour la valeur optimale du produit $\sigma_2 l$:

$$(\sigma_2 l)_{opt} = \frac{1}{2}\sqrt{cn^2(\omega)\,\beta\rho L/\pi n(2\omega)}. \tag{4.2.37}$$

On déduit de (4.2.36) et (4.2.37) que, lorsque les pertes nuisibles ρ s'accroissent, la valeur optimale du produit $\sigma_2 l$ augmente alors que $S_{2\,max}$ diminue. La puissance du deuxième harmonique augmente avec la croissance de l'intensité du pompage ($\varkappa_0$) et la diminution du paramètre de non-linéarité β diminue. Soulignons que pour la GICDH il est très important de réduire au minimum toutes les pertes passives.

On sait qu'au régime de génération continue la transparence du miroir de sortie d'un laser sans GICDH ne s'élève qu'à plusieurs pour cent. La relation (4.2.25) permet de conclure que pour réaliser le régime optimal de GICDH il faut assurer un coefficient de conversion en deuxième harmonique aussi de l'ordre de quelques pour cent. Ceci est parfaitement réalisable même dans le cas de la génération stationnaire si l'on utilise des cristaux fortement non linéaires de haute qualité, des schémas de la focalisation du rayonnement fondamental sur le cristal non linéaire, des méthodes spéciales d'addition des faisceaux d'ondes du deuxième harmonique, etc.

§ 4.3. Dynamique des lasers à pompage continu

Le *pompage continu* permet de réaliser non seulement le régime continu (stationnaire) mais également les régimes de fonctionnement *en impulsions*, par exemple, les régimes de déclenchement (la fréquence de répétition f des impulsions produites allant jusqu'à 50 Hz), de « coupure » de l'impulsion ($f = 10$ à 10^3 kHz), de synchronisation des modes ($f = 10^2$ à $5 \cdot 10^2$ MHz). A tous ces régimes on peut réaliser une GICDH efficace.

La dynamique des processus dans les lasers à pompage continu fonctionnant aux régimes de déclenchement et de coupure de l'impulsion peut être examinée d'une façon suffisamment complète sur la base des équations du bilan moyennées sur la longueur de la cavité et appelées généralement *équations de vitesse* [1]). Un tel examen correspond à l'utilisation d'un modèle « ponctuel » non stationnaire du laser dans lequel l'espace de la cavité est considéré comme étant réduit à un point. Ce modèle ne tient pas compte des effets spatiaux; il ne fait intervenir que les dérivées *par rapport au temps* des populations des niveaux et de l'intensité du champ lumineux. Le modèle « ponctuel » du laser fonctionnant en régime de GICDH a été étudié dans plusieurs ouvrages [2, 15]. Une approche plus générale suppose l'utilisation des équations du bilan aux *dérivées partielles* contenant tant une coordonnée de temps qu'une coordonnée spatiale [6].

Equations de vitesse. — Introduisons les désignations suivantes: N, la densité de l'inversion de populations des niveaux lasants; N_0, le paramètre de pompage (la valeur limite de l'inversion de populations pour une intensité de pompage donnée); M, la densité du nombre de photons dans la cavité à la fréquence de génération ω; B, le coefficient d'Einstein pour les transitions forcées dans le canal de génération; T, le temps de vie du photon dans la cavité ; T_1, le temps de relaxation de la différence entre les populations des niveaux

---

[1]) Pour l'analyse de la dynamique des lasers à solides pompés par impulsion, basée sur l'utilisation des équations de vitesse, voir par exemple [1], ainsi que [16].

lasants; φ, un entier qui décrit la variation de la différence de populations entre les niveaux en cas d'émission d'un photon (pour le schéma à quatre niveaux, $\varphi = 1$). Nous partirons du système d'équations de vitesse connu sous le nom de système d'équations de Statz et De Mars (le sens physique de ces équations est examiné par exemple au § 3.2 de [1]):

$$\left.\begin{aligned} dM/dt &= \hbar\omega BMN - M/T; \\ dN/dt &= (N_0 - N)/T_1 - \varphi\hbar\omega BMN. \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.1)$$

Le terme M/T entrant dans la première équation décrit la vitesse de décroissance de la densité de nombre de photons à la fréquence émise ω. Représentons ce terme sous la forme

$$M/T = (M/T_a)(1 + \psi + F). \qquad (4.3.2)$$

Une telle représentation correspond à la séparation des pertes dans la cavité en trois types: a) les pertes *passives* liées à l'absorption du rayonnement sur les transitions non lasantes ainsi qu'à la dispersion à travers la frontière latérale de la cavité [le terme M/T_a dans (4.3.2)]; b) les pertes *de modulation* ou *contrôlables* liées à la modulation de qualité de la cavité (le terme $M\psi/T_a$); c) les pertes dépendant du *type de charge* de la cavité (le terme MF/T_a). Le paramètre T_a est le temps de vie d'un photon dans la cavité, déterminé par les pertes passives. Si t_0 est le temps du parcours aller et retour du rayonnement dans la cavité, alors

$$\varepsilon = t_0/T_a = 2L\rho \qquad (4.3.3)$$

détermine la contribution des pertes passives pendant le double parcours. Dans le cas général les fonctions ψ et F dépendent de la densité de l'inversion de populations et du nombre de photons dans la cavité. Les pertes liées au caractère de charge de la cavité peuvent être tant *linéaires* en champ (pertes par rayonnement dans le miroir de sortie) que *non linéaires*. Ainsi, lors de la GICDH ces pertes sont *quadratiques* en champ. Passons aux grandeurs adimensionnées:

au temps réduit

$$\tau = t/T_a = \varepsilon t/t_0; \qquad (4.3.4)$$

à la densité normée d'inversion de populations

$$n = \hbar\omega BT_aN = N/N_{seuil} \qquad (4.3.5)$$

(N_{seuil} étant la valeur de seuil de la densité d'inversion de populations dans les miroirs à réflexion totale);

à la densité normée d'énergie du champ dans la cavité (à la fréquence d'oscillation)

$$u = \varphi\hbar\omega BT_aM. \qquad (4.3.6)$$

En outre, introduisons les désignations

$$a = T_a/T_1 ; \quad \Phi = N_0/N_{\text{seuil}}. \qquad (4.3.7)$$

En faisant usage des relations (4.3.4) à (4.3.7) et en tenant compte de (4.3.2), mettons le système d'équations (4.3.1) sous la forme suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} du/d\tau &= u(n-1) - u\psi(\tau, n, u) - uF(\tau, n, u); \\ dn/d\tau &= a(\Phi - n) - un. \end{aligned}} \qquad (4.3.8)$$

Si l'on prend en considération la contribution apportée dans $du/d\tau$ par l'émission spontanée, il faut introduire au second membre de la première équation (4.3.8) le terme αan, α étant la partie de l'émission spontanée contenue dans les modes produits. Dans ce cas le système d'équations (4.3.8) devient

$$\left.\begin{aligned} du/d\tau &= u(n-1) - u\psi - uF + \alpha an; \\ dn/d\tau &= a(\Phi - n) - un. \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.9)$$

Par la suite nous négligeons dans les équations de vitesse la contribution due à l'émission spontanée.

Charge linéaire et charge non linéaire quadratique de la cavité. — Les pertes conditionnées par le caractère de la charge de la cavité sont traduites par le terme uF entrant dans la première équation du système (4.3.8). Si $uF \sim u$, on dit que la charge est linéaire, et si $uF \sim u^2$, qu'elle est non linéaire quadratique.

La charge linéaire est due à la transparence $T = 1 - R$ du miroir de sortie de la cavité. La fonction F se détermine dans ce cas par la relation

$$F = \frac{\rho_{\text{ray}}}{\rho} = \frac{(1/2L)\ln(1/R)}{\varepsilon/2L} = \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{R} = \frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{1}{1-T}\right). \qquad (4.3.10)$$

Si la transparence du miroir de sortie est suffisamment faible ($T \ll 1$), la relation (4.3.10) peut s'écrire sous la forme

$$F \approx (1/\varepsilon)\ln(1 + T) \approx T/\varepsilon = (1 - R)/\varepsilon. \qquad (4.3.11)$$

Une charge non linéaire quadratique intervient dans un laser à GICDH lorsque le deuxième harmonique quitte librement la cavité, alors que le rayonnement fondamental y est confiné. Dans ce cas

$$F = ru, \qquad (4.3.12)$$

où r est le coefficient réduit de couplage non linéaire.

En analysant, sur la base des équations (4.3.8), la dynamique des processus qui se déroulent dans le laser, commençons par examiner la situation générale quand la nature de la charge (la forme de la fonction F) n'est pas spécifiée.

Puissance moyenne normée du rayonnement de sortie. — Supposons que le régime impulsionnel de fonctionnement soit rigoureuse-

ment périodique, en d'autres termes, régulier, *établi*. Désignons par τ_0 la période des fonctions $n(\tau)$ et $u(\tau)$. En choisissant des instants de temps τ_i et τ_f séparés par l'intervalle $\tau_0, (\tau_f - \tau_i = \tau_0)$, on peut évidemment écrire

$$n(\tau_f) = n(\tau_i)\,;\quad u(\tau_f) = u(\tau_i) \tag{4.3.13}$$

et, comme corollaire,

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{dn}{d\tau}\,d\tau = 0\,;\quad \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d\ln n}{d\tau}\,d\tau = 0\,;\quad \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{du}{d\tau}\,d\tau = 0. \tag{4.3.14}$$

La puissance moyenne normée du rayonnement de sortie se définit par la relation

$$\overline{P} = \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_i}^{\tau_f} F(\tau, n, u)\,d\tau, \tag{4.3.15}$$

ou, si l'on tient compte de la première équation du système (4.3.8), ainsi que de (4.3.14), par l'expression

$$\overline{P} = \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_i}^{\tau_f} (un - u - u\psi)\,d\tau. \tag{4.3.16}$$

En se servant de la seconde équation du système (4.3.8) et de (4.3.14) on trouve

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} u\,d\tau = a \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left(\frac{\Phi}{n} - 1\right) d\tau\,; \tag{4.3.17a}$$

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} un\,d\tau = a \int_{\tau_i}^{\tau_f} (\Phi - n)\,d\tau. \tag{4.3.17b}$$

En introduisant (4.3.17) dans (4.3.16), on obtient

$$\boxed{\overline{P} = \frac{a}{\tau_0} \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left(\Phi - \frac{\Phi}{n} - n + 1\right) d\tau - \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_i}^{\tau_f} u\psi\,d\tau.} \tag{4.3.18}$$

Pour trouver le *maximum* de puissance de sortie moyenne $\overline{P}_{\max}$, éliminons les pertes de modulation (posons $\psi = 0$) et déterminons n pour lequel la fonction $\Phi - \Phi/n - n + 1$ s'annule. La valeur cher-

chée de $n = n_{opt}$ est égale à

$$n_{opt} = \sqrt{\Phi} \tag{4.3.19}$$

et donc

$$\overline{P}_{max} = a(\sqrt{\Phi} - 1)^2. \tag{4.3.20}$$

Comme le montre (4.3.19), la valeur moyenne maximale de la puissance de sortie est obtenue au régime stationnaire; la nature de la charge de la cavité est dans ce cas sans importance. Pour les régimes de fonctionnement en impulsions d'un laser à pompage continu, la relation (4.3.19) peut servir de critère de rapprochement au régime de fonctionnement optimal du laser.

Régime périodique de modulation de qualité (à déclenchement instantané) [17]. — Ce régime est illustré par la fig. 4.4 qui représente les fonctions $Q(\tau)$, $n(\tau)$ et $u(\tau)$ pour un cycle de durée τ_0.

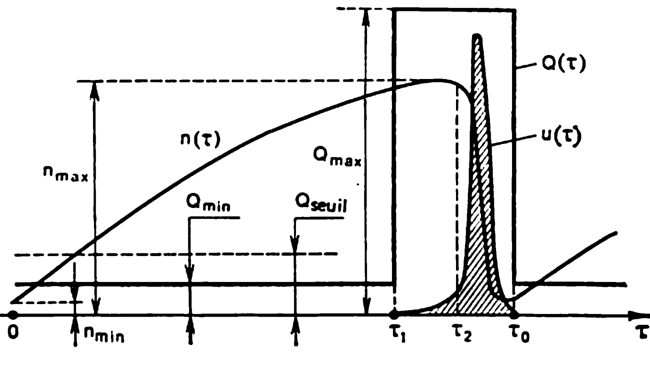


Fig. 4.4

Dans le cas d'une suite régulière d'impulsions lumineuses se répétant à la fréquence f, on a $\tau_0 = 1/fT_a$. Au commencement du cycle la valeur du facteur de surtension de la cavité est inférieure à celle de seuil : $(Q = Q_{min}) < Q_{seuil}$. Le laser n'oscille pas et le pompage fonctionnant de façon continue assure la croissance de la fonction $n(\tau)$ depuis sa valeur initiale $n(0) = n_{min}$. Si le facteur de surtension restait tout le temps au-dessous de sa valeur de seuil, la fonction $n(\tau)$ croîtrait en s'approchant asymptotiquement de la valeur limite Φ. Or, à un certain instant, le facteur de surtension de la cavité accuse une brusque croissance en prenant une valeur sensiblement plus grande que celle de seuil. Par raison de simplification, supposons que le facteur de surtension varie d'une manière instantanée de telle sorte que

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \psi_0 = \text{const} & \text{pour } 0 < \tau < \tau_1; \\ 0 & \text{pour } \tau_1 < \tau < \tau_0. \end{cases} \tag{4.3.21}$$

A l'instant τ_1 le laser commence à produire une impulsion lumineuse qui passe d'abord par une *étape de développement* caractérisée par une faible croissance du champ u à partir du niveau de bruit ; la durée de cette étape sera désignée par $\tau_{dév}$. Dans la fig. 4.4, $\tau_{dév}=\tau_2-\tau_1$; l'instant τ_2 sera déterminé d'après le maximum de la fonction $n(\tau)$. L'étape de développement est suivie de l'*étape de génération* (*d'oscillation*) *proprement dite* dans laquelle est émise une impulsion lumineuse de durée τ_i. Dans cette étape, la fonction n (τ) diminue brusquement de sa valeur maximale n_{max} jusqu'à sa valeur initiale n_{min}.

Des valeurs numériques typiques sont les suivantes: $\tau_{dév}T_a \approx$ $\approx 10^{-6}$ à 10^{-7} s, $\tau_i T_a \approx 10^{-7}$ s, $\tau_0 T_a \approx 10^{-4}$ s pour $f = 10$ kHz. Signalons que dans le cas du pompage par impulsion la durée de l'étape de développement est à peu près la même que dans le cas du pompage continu tandis que la durée de l'impulsion τ_i devient sensiblement plus courte ($\tau_i T_a \approx 10^{-8}$ s).

Avant l'oscillation laser, c'est-à-dire dans l'intervalle de temps de zéro à τ_1, la fonction n (τ) est déterminée par l'équation

$$dn/d\tau = a\,(\Phi - n) \qquad (4.3.22)$$

qui se déduit de (4.3.8) pour $u = 0$. En fait, cette équation est valable pour l'intervalle de temps de zéro à τ_2. Sa solution est de la forme

$$n\,(\tau) = \Phi - (\Phi - n_{min}) \exp\,(-a\tau). \qquad (4.3.23)$$

La valeur maximale n_{max} est atteinte pour $\tau = \tau_2$. On peut admettre que d'une façon approchée elle est égale à la valeur de n donnée par (4.3.23) pour $\tau = \tau_0$:

$$n_{max} = \Phi - (\Phi - n_{min}) \exp\,(-a\tau_0). \qquad (4.3.24)$$

Dans l'intervalle de temps de τ_2 à τ_0, la fonction n (τ) est déterminée par l'équation

$$dn/d\tau = -un. \qquad (4.3.25)$$

Cette équation se déduit de (4.3.8) à condition que pour l'étape d'oscillation relativement courte on puisse négliger tant l'action du pompage que la relaxation des niveaux lasants, c'est-à-dire en admettant que $a\,(\Phi - n) \ll un$. La solution de l'équation (4.3.25) satisfaisant à la condition $n\,(\tau_2) = n_{max}$ est de la forme

$$n\,(\tau) = n_{max} \exp\left[-\int_{\tau_2}^{\tau} u\,(\tau)\,d\tau\right]. \qquad (4.3.26)$$

Dans l'étape qui s'étend de $\tau = 0$ à $\tau = \tau_2$ la fonction u (τ) est voisine de zéro. De ce fait, l'expression (4.3.26) peut être représentée de façon approchée sous la forme

$$n\,(\tau) = n_{max} \exp\left[-\int_{0}^{\tau} u\,(\tau)\,d\tau\right]. \qquad (4.3.27)$$

Puisque pour $\tau = \tau_0$ la fonction $n(\tau)$ doit reprendre sa valeur initiale n_{min}, on peut écrire

$$n_{max} \exp\left[-\int_0^{\tau_0} u(\tau)\, d\tau\right] = n_{min}. \qquad (4.3.28)$$

En introduisant les désignations

$$\exp(-a\tau_0) = A\ ;\ \exp\left[-\int_0^{\tau_0} u(\tau)\, d\tau\right] = B, \qquad (4.3.29)$$

récrivons (4.3.24) et (4.3.28) sous la forme

$$n_{max} = \Phi - (\Phi - n_{min}) A\ ;\ n_{min} = n_{max} B. \qquad (4.3.30)$$

On en déduit que

$$n_{min} = (1-A) B\Phi/(1-AB)\ ; \qquad (4.3.31a)$$

$$n_{max} = (1-A)\Phi/(1-AB). \qquad (4.3.31b)$$

Faisons usage de (4.3.16) en y posant $\tau_i = 0$ et $\tau_f = \tau_0$ et écrivons l'expression donnant l'énergie de l'impulsion de sortie

$$E_1 = \bar{P}\tau_0 = \int_0^{\tau_0} u(n-1)\, d\tau - C, \qquad (4.3.32)$$

où

$$C = \int_0^{\tau_0} u\psi\, d\tau. \qquad (4.3.33)$$

Pour le régime de modulation de qualité on peut adopter, à condition que le déclenchement soit instantané, que

$$C = 0, \qquad (4.3.34)$$

car pour $0 < \tau < \tau_1$ on a $u = 0$, et pour $\tau_1 < \tau < \tau_0$, $\psi = 0$.

En tenant compte de (4.3.25), écrivons

$$\int_0^{\tau_0} un\, d\tau \approx -\int_{\tau_2}^{\tau_0} \frac{dn}{d\tau}\, d\tau = n(\tau_2) - n(\tau_0) = n_{max} - n_{min}. \qquad (4.3.35)$$

En utilisant (4.3.29), (4.3.31), (4.3.34) et (4.3.35), récrivons (4.3.32) sous la forme

$$\boxed{E_1 = (1-A)(1-B)\Phi/(1-AB) + \ln B.} \qquad (4.3.36)$$

Il est aisé de s'assurer que la fonction $E_1(B)$ passe par un maximum pour

$$B=[\sqrt{1+D^2/4}-D\sqrt{\Phi}/2]^2/A\equiv B_0, \qquad (4.3.37)$$

où $D = 1/\sqrt{A} - \sqrt{A}$. En se servant de (4.3.31) et (4.3.37), on trouve

$$n_{max}n_{min}=\Phi. \qquad (4.3.38)$$

C'est la condition de *régime d'oscillation optimal.*

Supposons que la fréquence de répétition des impulsions soit *suffisamment élevée*:

$$f\gg a \text{ ou, autrement dit, } a\tau_0\ll 1. \qquad (4.3.39)$$

Dans ce cas $A \approx 1 - a\tau_0$, $D \approx a\tau_0$ et donc

$$B_0\approx(1+a\tau_0)(1-a\tau_0\sqrt{\Phi}/2)^2\approx 1-a\tau_0(\sqrt{\Phi}-1).$$

Ainsi,

$$B_0=1-(\sqrt{\Phi}-1)\,a'/f, \text{ où } a'=a/T_a. \qquad (4.3.40)$$

Si l'on reporte (4.3.40) dans (4.3.36) et que l'on pose $A = 1 - a'/f$, on obtient

$$E_{1\,max}=(\sqrt{\Phi}-1)^2\,a'/f. \qquad (4.3.41)$$

Il en résulte que le maximum de puissance de sortie moyenne a pour valeur

$$\overline{P}_{max}=E_{max}fT_a=(\sqrt{\Phi}-1)^2\,a. \qquad (4.3.42)$$

Le résultat (4.3.42) coïncide avec (4.3.20) obtenu pour le régime continu. Ainsi, lorsque la fréquence de répétition des impulsions est suffisamment élevée (dans un laser à YAG: Nd^{3+}, $f \gtrsim 5$ kHz), la puissance moyenne de rayonnement obtenue lors du fonctionnement en régime déclenché est pratiquement égale à la puissance développée par le même laser fonctionnant en régime continu.

En introduisant (4.3.40) dans (4.3.31) et en posant $A = 1 - a'/f$, on trouve

$$n_{min}=B_0\sqrt{\Phi}=\sqrt{\Phi}[1-(\sqrt{\Phi}-1)\,a'/f]; \qquad (4.3.43a)$$

$$n_{max}=\sqrt{\Phi}. \qquad (4.3.43b)$$

Lorsque f augmente, $B_0\to 1$ et donc

$$n_{max}=n_{min}=\sqrt{\Phi}, \qquad (4.3.44)$$

ce qui correspond à la valeur optimale de l'inversion pour le régime continu [v. (4.3.19)].

Condition de stabilité du régime déclenché périodique [18]. — Pour étudier la stabilité de ce régime supposons qu'il existe une certaine dépendance

$$n(\tau_0) = \psi(n(0)). \qquad (4.3.45)$$

Si

$$dn(\tau_0)/dn(0) < 1, \qquad (4.3.46)$$

le régime est *stable*. Soit une certaine variation $\Delta n(0)$ de la valeur initiale de l'inversion qui entraîne une variation $\Delta n(\tau_0)$ de sa valeur finale; le régime est stable si $\Delta n(\tau_0) < \Delta n(0)$. Au contraire, si

$$dn(\tau_0)/dn(0) > 1, \qquad (4.3.47)$$

le régime est instable. Dans le cas général, l'instabilité du régime signifie une variation désordonnée de l'amplitude et de la durée d'une impulsion à l'autre, ainsi qu'une variation du temps de développement de l'impulsion, ce qui se traduit finalement par l'instabilité de la puissance moyenne du rayonnement de sortie. En règle générale, au régime instable, la structure de modes et le spectre d'émission sont eux aussi instables.

Récrivons (4.3.46) sous la forme

$$\left[\frac{dn(\tau_0)}{dn(0)} = \frac{dn(\tau_0)}{dn(\tau_2)}\,\frac{dn(\tau_2)}{dn(0)}\right] < 1. \qquad (4.3.48)$$

On déduit de (4.3.30) (sans poser maintenant $n(0) = n(\tau_0) = n_{\min}$) que

$$n(\tau_2) = \Phi - [\Phi - n(0)]\,A; \quad n(\tau_0) = n(\tau_2)\,B. \qquad (4.3.49)$$

On en tire

$$dn(\tau_0)/dn(\tau_2) = B; \quad dn(\tau_2)/dn(0) = A. \qquad (4.3.50)$$

Introduisons (4.3.50) dans (4.3.48), on obtient la condition de stabilité du régime d'oscillation sous la forme

$$AB < 1. \qquad (4.3.51)$$

Charge linéaire au régime déclenché. — Jusqu'ici nous n'avons pas concrétisé la nature de la charge de la cavité. Comme il est indiqué précédemment, à la GICDH correspond une charge non linéaire quadratique. Pourtant il est utile d'analyser d'abord le cas de la charge linéaire (charge déterminée par la transparence T du miroir de sortie).

En utilisant (4.3.11) et en tenant compte de (4.3.21), écrivons le système (4.3.8) dans l'intervalle $\tau_1 < \tau < \tau_0$ sous la forme

$$\boxed{\begin{aligned} du/d\tau &= u(n - 1 - T/\varepsilon); \\ dn/d\tau &= -un. \end{aligned}} \qquad (4.3.52)$$

Pour $0 < \tau < \tau_1$ nous supposerons que $u = 0$.

Notons que le temps de développement de l'impulsion lumineuse et sa durée dépendent de la différence entre l'inversion maximale $n_{\max} \approx n(\tau_1)$ et l'inversion de seuil $n_{\text{seuil}} = 1 + T/\varepsilon$. Des considérations générales montrent que pour $n_{\max} \gg n_{\text{seuil}}$, l'impulsion se développe rapidement et *arrive à s'émettre* pendant le temps de τ_1 à τ_0. Ce cas se rapporte au domaine des fréquences de répétition f relativement basses (des grandes périodes de déclenchement τ_0).

Lorsque $n_{max} \gg n_{seuil}$, le développement de l'impulsion est relativement lent, de sorte que l'impulsion n'est émise pendant le temps $\tau_0 - \tau_1$ que partiellement et à l'instant τ_0, où le facteur de

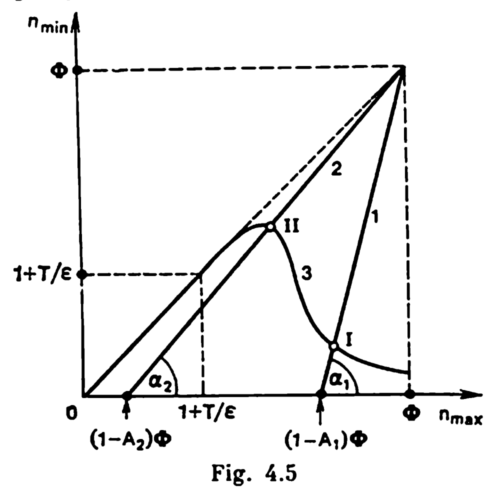


Fig. 4.5

surtension de la cavité s'abaisse de nouveau, il reste dans la cavité une énergie « non émise » du champ $u(\tau_0)$.

En portant la seconde équation (4.3.52) dans la première, on obtient

$$dn/d\tau = -(1 + T/\varepsilon)\, u - du/d\tau. \qquad (4.3.53)$$

Intégrons cette équation de τ_1 à τ_0:

$$n(\tau_0) - n(\tau_1) = -\left(1 + \frac{T}{\varepsilon}\right) \int_{\tau_1}^{\tau_0} u\, d\tau - [u(\tau_0) - u(\tau_1)]. \qquad (4.3.54)$$

Vu que $u = 0$ pour $0 < \tau < \tau_1$, récrivons (4.3.54) sous la forme [en tenant compte de (4.3.29)]:

$$n(\tau_1) - n(\tau_0) = -(1 + T/\varepsilon) \ln B + u(\tau_0) \qquad (4.3.55)$$

(ici, pour plus de généralité, nous supposons que $u(\tau_0) \neq 0$). Notons que $B = n_{min}/n_{max}$, il vient

$$n_{max} - n_{min} = (1 + T/\varepsilon) \ln (n_{max}/n_{min}) + u(\tau_0). \qquad (4.3.56)$$

Cette relation établit le lien entre n_{min} et n_{max} sur l'étape de τ_1 à τ_0. En considérant l'étape de $\tau = 0$ à τ_1, on obtient encore une relation entre n_{min} et n_{max} [v. (4.3.24)]:

$$n_{min} = [n_{max} - (1 - A)\,\Phi]/A. \qquad (4.3.57)$$

La fig. 4.5 représente les courbes de variation de n_{min} en fonction de n_{max} définies par les relations (4.3.57) (droites *1* et *2*) et

(4.3.56) (courbe *3*). Les droites *1* et *2* correspondent aux différentes valeurs de la fréquence de répétition des impulsions : f_1 et f_2, telles que $f_1 < f_2$ [rappelons que $A = \exp(-a'/f)$]. Signalons que $\operatorname{tg} \alpha_1 = 1/A_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = 1/A_2$ (α_1 et α_2 étant les angles d'inclinaison des droites *1* et *2* respectivement). Les points I, où la courbe *3* coupe la droite *1*, et II, où elle coupe la droite *2*, correspondent au régime d'oscillation établi pour $f = f_1$ et $f = f_2$ respectivement. Au point I (basse fréquence de répétition des impulsions), $n_{\min}/n_{\max} < 1/A_1$, et selon (4.3.51), le régime d'oscillation est stable. Au point II (forte valeur de f), $n_{\min}/n_{\max} > 1/A_2$ et donc le régime d'oscillation est instable.

L'instabilité du régime pour de fortes valeurs de f est liée à l'émission *incomplète* de l'impulsion. Pour des valeurs élevées de la fréquence de répétition des impulsions (pour de petites τ_0), l'inversion n'arrive pas à prendre une valeur sensiblement supérieure à n_{seuil} pendant le temps τ_1. De ce fait, le temps de développement de l'impulsion peut se trouver proche de $\tau_0 - \tau_1$ et même dépasser ce temps. Dans un tel cas, la cavité conserve à l'instant τ_0 un champ lumineux résiduel et un facteur de surtension appréciable.

Charge non linéaire quadratique au régime déclenché [9], [17], [18]. — Proposons-nous d'examiner le fonctionnement au régime déclenché périodique d'un laser à pompage continu avec GICDH. Supposons que le rayonnement fondamental soit confiné dans la cavité, alors que le rayonnement du deuxième harmonique puisse en sortir librement. En faisant usage de (4.3.12) et en tenant compte de (4.3.21), écrivons le système d'équations de vitesse (4.3.8) dans l'intervalle $\tau_1 < \tau < \tau_0$ sous la forme

$$\boxed{\begin{aligned} du/d\tau &= u(n-1) - ru^2; \\ dn/d\tau &= -un. \end{aligned}} \tag{4.3.58}$$

Dans le cas considéré $n_{\text{seuil}} = 1$ (car $T = 0$ à la fréquence fondamentale). Les équations (4.3.58) permettent d'écrire

$$du/dn = (1 + ru - n)/n. \tag{4.3.59}$$

La solution de l'équation (4.3.59) est de la forme [17] :

$$u = mn^r - \alpha n - \beta, \tag{4.3.60}$$

avec

$$m = \frac{1}{[n(\tau_1)]^r}\left[\frac{n(\tau_1)}{1-r} + \frac{1}{r}\right]; \quad \alpha = \frac{1}{1-r}; \quad \beta = \frac{1}{r}. \tag{4.3.61}$$

La fonction $u(n)$ passe par un maximum pour

$$n = (mr/\alpha)^{1/(1-r)} \equiv n_0. \tag{4.3.62}$$

Ce maximum a pour valeur

$$u_{max} = (n_0 - 1)/r. \qquad (4.3.63)$$

En posant dans (4.3.60) $u = 0$, on obtient l'équation déterminant n_{min}:

$$m\,(n_{min})^r - \alpha n_{min} - \beta = 0. \qquad (4.3.64)$$

Si $n(\tau_1) > 1$, la solution de cette équation est comprise dans l'intervalle

$$(r-1)/r < n_{min} < 1. \qquad (4.3.65)$$

Lorsque le coefficient de couplage non linéaire r augmente, l'inversion tend vers l'unité. Calculons l'énergie de l'impulsion de sortie

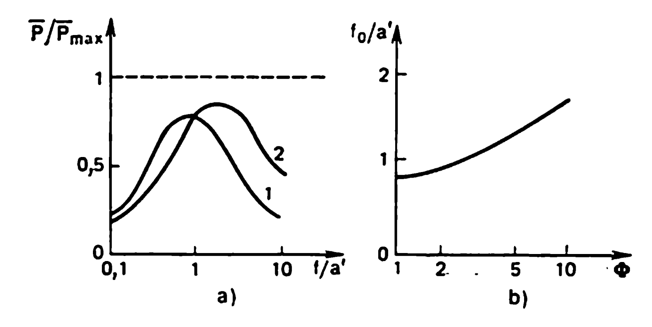


Fig. 4.6

pour $r \gg 1$, en utilisant à cet effet les relations (4.3.36) et (4.3.30) et en posant $n_{min} = 1$. Il vient

$$E_1 = (\Phi - 1)(1 - A) - \ln[1 + (\Phi - 1)(1 - A)]. \qquad (4.3.66)$$

A l'aide de (4.3.66) on peut calculer la valeur moyenne de la puissance de sortie du deuxième harmonique $\overline{P} = E_1 f T_a$. La fig. 4.6, *a* représente les courbes de variation de $\overline{P}/\overline{P}_{max}$ en fonction de f/a', la puissance $\overline{P}_{max}$ étant définie par la relation (4.3.42) [18]. La courbe *1* est obtenue pour $\Phi = 1{,}5$, et la courbe *2*, pour $\Phi = 10$. La droite portée en traits interrompus correspond au régime optimal. On voit qu'une GICDH efficace (au voisinage du régime optimal) n'est réalisable que dans un petit intervalle de fréquences f aux environs de a'. La fréquence optimale $f = f_0$, à laquelle la puissance de deuxième harmonique est maximale, peut être trouvée si l'on annule la dérivée de la fonction $\overline{P}(f)$. La variation de f_0/a' en fonction de Φ est montrée à la fig. 4.6, *b*.

Soulignons que, comme le montre la fig. 4.6, la GICDH à un régime proche du régime optimal n'est possible que dans le cas des

fréquences relativement *basses* de répétition des impulsions. Pour des f élevées, l'efficacité de la GICDH diminue de façon substantielle.

Ceci est facile à saisir si l'on examine la génération de deuxième harmonique dans un cristal non linéaire placé à l'extérieur de la cavité d'un laser déclenché à pompage continu. Pour de faibles f (jusqu'à une certaine valeur f_1) la puissances par impulsion de rayonnement fondamental P_i^{ω} est pratiquement constante ; quant à la puissance moyenne $\overline{P}^{\omega}$, elle croît dans ce cas linéairement en même temps que f. Dans la région de $f > f_1$, l'augmentation de la fréquence de répétition des impulsions entraîne une diminution de P_i^{ω} et de la vitesse de croissance de $\overline{P}^{\omega}$. Pour des valeurs suffisamment grandes de f, la puissance moyenne de rayonnement fondamental devient pratiquement constante et égale à la

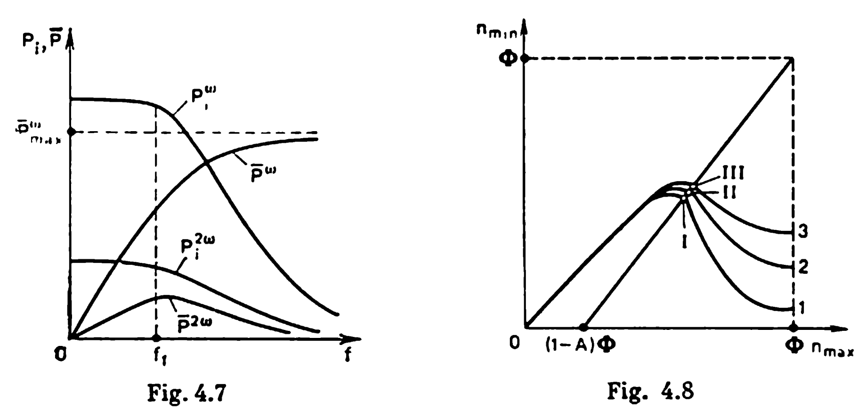


Fig. 4.7

Fig. 4.8

puissance développée par un laser fonctionnant au régime continu. Quant à l'énergie de l'impulsion, elle continue à décroître, de même que la puissance par impulsion, lorsque f augmente.

La puissance par impulsion de deuxième harmonique $P_i^{2\omega}$ se comporte, lorsque f augmente, de la même manière que la puissance par impulsion de rayonnement fondamental : pour $f < f_1$ elle est constante et ensuite elle commence à décroître. Il est à noter que, la conversion en deuxième harmonique étant de caractère quadratique, cette décroissance est plus rapide que dans le cas du rayonnement fondamental. C'est pourquoi, pour $f > f_1$, la puissance moyenne du deuxième harmonique $\overline{P}^{2\omega}$ commence à décroître lorsque f augmente.

Toutes ces dépendances sont montrées pour le cas de la génération extracavité de deuxième harmonique sur la fig. 4.7. On y voit que la fonction $\overline{P}^{2\omega}(f)$ passe par un maximum dans la région de valeurs de f au voisinage de f_1. Un tel maximum s'observe également au régime de GICDH.

En dérivant $n_{\min}$ figurant dans (4.3.64) par rapport à $n_{\max} = n(\tau_1)$, on trouve que

$$|dn_{\min}/dn_{\max}| < 1 \qquad (4.3.67)$$

et donc le régime considéré de GICDH est stable. Ce régime correspond à « l'achèvement » (à l'émission de la totalité) de l'impulsion, car l'équation (4.3.64) a été obtenue pour $u(0) = u(\tau_0) = 0$.

Supposons que $n_{max} \gg 1$ et que la totalité de l'impulsion n'est donc pas émise pendant le temps $\tau_0 - \tau_1$. Dans ce cas, on obtient à partir de (4.3.60), au lieu de (4.3.64), l'équation suivante pour la détermination de n_{min}:

$$m\,(n_{min})^r + \alpha n_{min} - \beta = u\,(\tau_0). \qquad (4.3.68)$$

Le cas considéré est illustré à la fig. 4.8 construite par analogie avec la fig. 4.5. A la différence de cette dernière on a pris ici une seule valeur de la fréquence de répétition des impulsions. Cette valeur est suffisamment grande pour que l'impulsion n'arrive pas à être émise en totalité. Les courbes *1*, *2* et *3* de la fig. 4.8 montrent la variation de n_{min} en fonction de n_{max}, définie par l'équation (4.3.68), pour différentes valeurs du paramètre r. La courbe *1* est obtenue pour $r = 0$, la courbe *2*, pour $r = r_1$ et la courbe *3*, pour $r = r_2$ tels que $r_1 < r_2$. A trois points d'intersection I, II et III de la figure correspondent trois régimes d'oscillation du laser. En examinant cette figure, nous voyons qu'au fur et à mesure que r augmente, la pente de la tangente, menée au point d'intersection à la courbe correspondante, diminue, de sorte que le régime d'oscillation qui est instable pour de petites valeurs de r peut devenir stable si r prend des valeurs suffisamment grandes.

Ainsi, si dans le cas de la charge linéaire le régime d'émission incomplète de l'impulsion est toujours instable, avec une charge non linéaire quadratique ce régime peut devenir stable. En d'autres termes, à la différence du laser à charge linéaire, le laser à GICDH peut fonctionner de façon stable avec des valeurs relativement élevées de la fréquence de répétition des impulsions lorsque l'impulsion n'est émise qu'en partie.

Régime de « coupure » de l'impulsion [18], [19]. — Pour l'augmentation de f il faut que l'inversion atteigne plus vite sa valeur maximale et que le processus de développement de l'impulsion à émettre se déroule plus rapidement. On peut y arriver si l'on maintient l'inversion à un niveau relativement élevé; à cet effet, il suffit d'*interrompre l'oscillation* en réduisant brusquement, à un certain instant, le facteur de surtension de la cavité. Un tel régime est appelé régime « d'interruption de l'impulsion »[1]). L'émission de l'impulsion à ce régime est incomplète. Dans ce cas, la cavité conserve, en plus de l'inversion résiduelle, également un certain rayonnement résiduel, ce qui réduit la durée de l'étape de développement de l'impulsion.

Pour réaliser un régime stable d'interruption de l'impulsion il est nécessaire d'utiliser une charge non linéaire quadratique, c'est-à-

[1]) A ce qu'il paraît, il serait plus correct de parler de « l'interruption de l'oscillation ». Le terme « coupure de l'impulsion » convient pour le régime de cavity-dumping auquel il se produit réellement la coupure de l'impulsion lumineuse sortant de la cavité (voir plus loin).

dire de fonctionner en régime de GICDH. Si la charge est linéaire, l'interruption de l'oscillation qui conduit à une émission incomplète de l'impulsion rend le régime instable.

Désignons par τ_3 l'instant d'interruption de l'oscillation, c'est-à-dire l'instant où le facteur de surtension de la cavité tombe jusqu'au minimum. Soit $u_0 = u(\tau_3)$ le champ à l'intérieur de la cavité à l'instant τ_3. Dans ce cas, le terme C entrant dans (4.3.32) ne peut déjà être considéré comme nul. Au lieu de (4.3.36) écrivons maintenant

$$E_1 = (1-A)(1-B)\Phi/(1-AB) + \ln B - u_0. \qquad (4.3.69)$$

L'instant τ_3 est choisi de façon que le rapport entre n_{min} et n_{max} soit voisin du rapport optimal (4.3.38). On a alors conformément à (4.3.43)

$$n_{min} \approx B_0 \sqrt{\Phi}; \quad n_{max} \approx \sqrt{\Phi}. \qquad (4.3.70)$$

Dans ce cas, l'énergie de l'impulsion est proche de sa valeur maximale définie par la relation (4.3.41).

Au régime considéré on doit satisfaire à la condition $u_0 \ll E_1$. A cet effet, il suffit d'exiger que

$$(u_{max} = (n_0 - 1)/r) \ll E_1. \qquad (4.3.71)$$

Si l'on tient compte de (4.3.41), ceci est équivalent à la condition

$$r \gg f/(\sqrt{\Phi} - 1)\, a'. \qquad (4.3.72)$$

Signalons que les valeurs limites de la fréquence de répétition des impulsions, en dessous desquelles le régime devient instable, sont sensiblement *plus élevées* (d'un ordre de grandeur) au régime d'interruption de l'impulsion avec une charge non linéaire quadratique qu'au régime déclenché avec l'émission de l'impulsion totale. Le temps de développement de l'impulsion est dans ce cas beaucoup plus court qu'au régime d'achèvement, car l'inversion est maintenue à un niveau nettement supérieur au seuil.

Régimes de modulation de la charge [19] à [21]. — L'étude des régimes de fonctionnement en impulsions des lasers à pompage continu serait incomplète sans l'analyse, si sommaire soit-elle, des régimes de *modulation de la charge* de la cavité. Considérons le fonctionnement sur une charge linéaire en deux régimes : a) de modulation *profonde* de la charge ; b) de modulation *peu profonde* de la charge (régime de décharge de la cavité, en anglais cavity-dumping).

Dans le cas de la modulation profonde de la charge, le coefficient de réflexion R du miroir de sortie varie dans le temps de la façon suivante :

$$R = \begin{cases} 0 \text{ (charge appliquée) pour } 0 < \tau < \tau_1, \\ 1 \text{ (charge supprimée) pour } \tau_1 < \tau < \tau_0. \end{cases} \qquad (4.3.73)$$

En vertu de (4.3.10) cela signifie que

$$F = \begin{cases} \infty \text{ pour } 0 < \tau < \tau_1; \\ 0 \text{ pour } \tau_1 < \tau < \tau_0. \end{cases} \qquad (4.3.74)$$

Dans le cas de la modulation peut profonde, la charge n'est débranchée qu'en partie:

$$R = \begin{cases} R_0 \text{ (charge appliquée) pour } 0 < \tau < \tau_1; \\ 1 \text{ (charge supprimée) pour } \tau_1 < \tau < \tau_0. \end{cases} \tag{4.3.75}$$

D'après (4.3.10) cela signifie que

$$F = \begin{cases} (1/\varepsilon) \ln (1/R_0) \text{ pour } 0 < \tau < \tau_1; \\ 0 \qquad \text{pour } \tau_1 < \tau < \tau_0. \end{cases} \tag{4.3.76}$$

La fig. 4.9 illustre les régimes que nous considérons. Elle montre les courbes représentatives des fonctions n (τ) et u (τ), où u (τ) est le champ *à l'intérieur* de la cavité: les rectangles hachurés représentent l'impulsion lumineuse qui sort

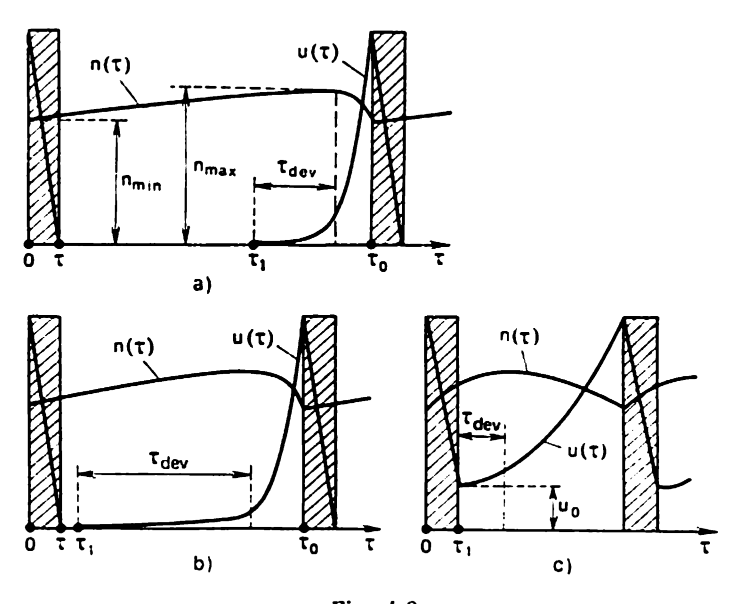


Fig. 4.9

de la cavité au cours de chaque cycle. Les désignations utilisées dans cette figure: τ_c, le temps de parcours aller et retour du rayonnement dans la cavité; τ_0 (ainsi que $\tau = 0$), l'instant d'application de la charge; τ_1, l'instant de suppression de la charge.

La fig. 4.9, *a* se rapporte au cas de la modulation profonde de la charge pour des fréquences de répétition des impulsions relativement peu élevées. Pendant l'intervalle de temps de $\tau = 0$ à τ_1 le laser n'oscille pas (la cavité ne fonctionne pas), il se produit la croissance de l'inversion. A l'instant τ_1 la cavité se trouve fermée et le laser commence à osciller; au fur et à mesure que l'oscillation se développe, l'inversion diminue. A l'instant τ_0 la cavité se trouve de nouveau complètement ouverte et pendant le temps τ_c toute l'énergie lumineuse accumulée pendant un cycle est émise vers l'extérieur.

La fig. 4.9, *b* représente le cas de la modulation profonde de la charge pour la fréquence limite de répétition des impulsions. A la différence du régime précédent, le développement de la génération commence maintenant pour un niveau

plus bas de l'inversion, de sorte que l'étape de développement devient plus longue (dans ce cas $\tau_{dev} \approx \tau_0$).

La fig. 4.9, *c* correspond à la modulation peu profonde de la charge (régime de cavity-dumping). A l'instant $\tau = 0$, la charge est appliquée et l'émission de l'impulsion de sortie commence; à l'instant τ_1, la charge est supprimée. L'ouverture de la cavité en ce régime n'étant pas complète, toute l'énergie lumineuse qui y est emmagasinée ne peut être émise pendant le temps τ_c. Dans le cas représenté sur la fig. 4.9, *c* le temps τ_1 est choisi égal au temps τ_c. Il se produit en quelque sorte la *coupure* de l'impulsion lumineuse sortant de la cavité, si bien qu'une énergie non émise u_0 reste à l'intérieur de la cavité. Il en résulte que le laser démarre à l'instant τ_1 mais non sur le bruit (comme c'est le cas des régimes des fig. 4.9, *a* et *b*), mais sur un niveau plus élevé correspondant à l'énergie résiduelle u_0. Ceci rend beaucoup plus courte la durée de l'étape de développement et donc permet d'élever la valeur limite de la fréquence de répétition des impulsions.

§ 4.4. Schémas optiques des lasers à solides à GICDH

Dans tous les schémas représentés sur les figures de ce paragraphe les flèches portées en traits pleins se rapportent au rayonnement fondamental, et celles en traits interrompus, au deuxième harmonique. Les désignations adoptées signifient: *EA*, l'élément actif du laser; *CN*, le cristal non linéaire; MR_1, le miroir totalement réfléchissant pour la fréquence fondamentale; MR_2, le miroir totalement réfléchissant pour le deuxième harmonique; MR_{12}, le miroir totalement réfléchissant tant à la fréquence fondamentale qu'à celle du deuxième harmonique; MD_1, le miroir dichroïque du premier type (totalement réfléchissant pour le rayonnement fondamental et totalement transparent au deuxième harmonique); MD_2, le miroir dichroïque du second type (totalement réfléchissant pour le deuxième harmonique et totalement transparent à la fréquence fondamentale); *RS*, le revêtement diélectrique saturable porté sur la face terminale du cristal non linéaire. Les interrupteurs optiques que l'on introduit dans la cavité pour pouvoir commander les pertes ne sont pas représentés dans les schémas de ce paragraphe.

Schémas à perte de l'onde inverse utilisant un miroir dichroïque. — Ce sont les schémas les plus simples. La fig. 4.10 en donne deux exemples. Pour l'extraction du rayonnement du deuxième harmonique de la cavité on utilise un miroir dichroïque du premier type (miroir MD_1). Rappelons que le processus de génération de deuxième harmonique se déroule dans les deux sens: par les ondes progressives de fréquence fondamentale directe et inverse. Dans les schémas de la fig. 4.10, l'onde du deuxième harmonique émise dans le sens du miroir de sortie vers l'élément actif (l'onde inverse du deuxième harmonique) est perdue de façon irrécupérable: elle pénètre dans l'élément actif et y est absorbée. Ainsi, le rayonnement créé dans le cristal non linéaire n'est utilisé qu'à moitié.

A la différence de la fig. 4.10, *a* dans le schéma de la fig. 4.10, *b* le miroir dichroïque de sortie est porté directement sur la face ter-

minale du cristal non linéaire. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de porter un revêtement saturable sur la face terminale de droite du cristal non linéaire; le nombre d'éléments placés à l'intérieur de la cavité s'en trouve réduit. Il est vrai que le dépôt d'un miroir dichroïque sur des cristaux doux solubles dans l'eau (de $LiIO_3$ ou du groupe

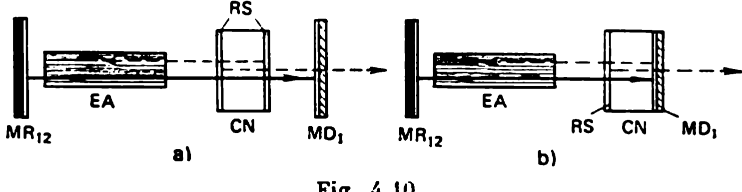


Fig. 4.10

de KDP) présente des difficultés. Cette opération est plus facile à réaliser dans le cas des cristaux de $LiNbO_3$ et de $Ba_2NaNb_5O_{15}$.

Les deux schémas représentés sur la fig. 4.10 sont applicables aux interactions *ooe* et *oee*.

Si l'on a recours à des cristaux non linéaires à forte biréfringence dans la direction du synchronisme, on peut utiliser le schéma à deux cristaux non linéaires placés l'un après l'autre, dont les axes optiques

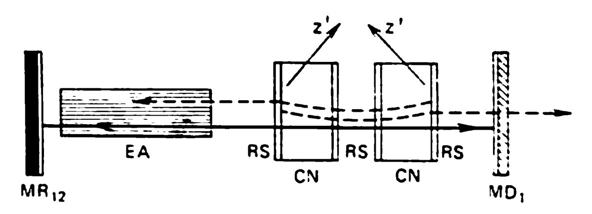


Fig. 4.11

sont orientés l'un par rapport à l'autre comme l'indique la fig. 4.11 (z' étant les axes optiques des cristaux). Rappelons à ce propos le schéma de la génération intracavité du deuxième harmonique représenté sur la fig. 3.31, *a*.

Schémas à perte de l'onde inverse sans miroir dichroïque [22]. — La réalisation des miroirs dichroïques étant liée à certaines difficultés, on utilise également des schémas de GICDH ne comportant pas de tels miroirs, dans lesquels l'extraction du rayonnement du deuxième harmonique de la cavité s'effectue à l'aide des prismes biréfringents ou dispersifs. En traversant le prisme, le rayonnement du deuxième harmonique modifie sa direction de propagation si bien qu'il quitte la cavité.

La fig. 4.12, *a* représente un schéma utilisant un prisme *biréfringent* connu sous le nom de prisme de Glan (*PG*) et dont le fonctionnement repose sur la différence de polarisation du rayonnement

fondamental et de celui du deuxième harmonique. Le schéma considéré n'est applicable que pour l'interaction *ooe*. Le prisme de Glan livre passage au rayonnement polarisé rectilignement suivant la normale au plan de la figure (au rayonnement fondamental) et réfléchit, sous un angle par rapport à l'axe de la cavité, le rayonnement polarisé rectilignement dans le plan de la figure (le rayonnement du deuxième harmonique). Bien entendu, le prisme de Glan placé à l'intérieur de la cavité augmente notablement les pertes passives. En outre, si l'élément actif devient le siège d'une certaine dépolarisation du rayonnement (par exemple, par suite des distorsions d'origine thermique), le prisme biréfringent provoquera des pertes additionnelles parce qu'une partie du rayonnement fondamental sera réfléchie, en cas de la dépolarisation, par le prisme et donc extraite de la cavité résonnante.

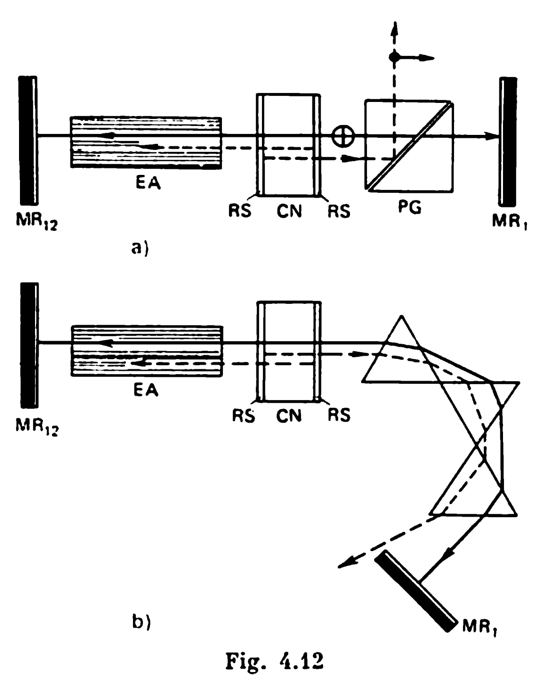


Fig. 4.12

La fig. 4.12, *b* montre un schéma contenant trois prismes *dispersifs* pour la séparation dans l'espace des faisceaux de fréquence fondamentale et de deuxième harmonique et pour l'extraction du deuxième harmonique de la cavité. A la différence du schéma de la fig. 4.12, *a*, ce schéma est applicable tant à l'interaction *ooe* qu'à l'interaction *oee*.

Schémas à miroir de renvoi [13]. — En utilisant un miroir à forte réflexion à la fréquence du deuxième harmonique, on peut inverser

le sens de propagation de l'onde inverse du deuxième harmonique et donc sortir de la cavité pratiquement la totalité de rayonnement produit dans le cristal non linéaire. Un tel miroir est dit miroir *de renvoi*. La fig. 4.13 montre trois schémas à miroir de renvoi.

Le schéma de la fig. 4.13, *a* comporte deux miroirs dichroïques de types différents : MD_1 et MD_2. MD_2 est un miroir de renvoi, et MD_1,

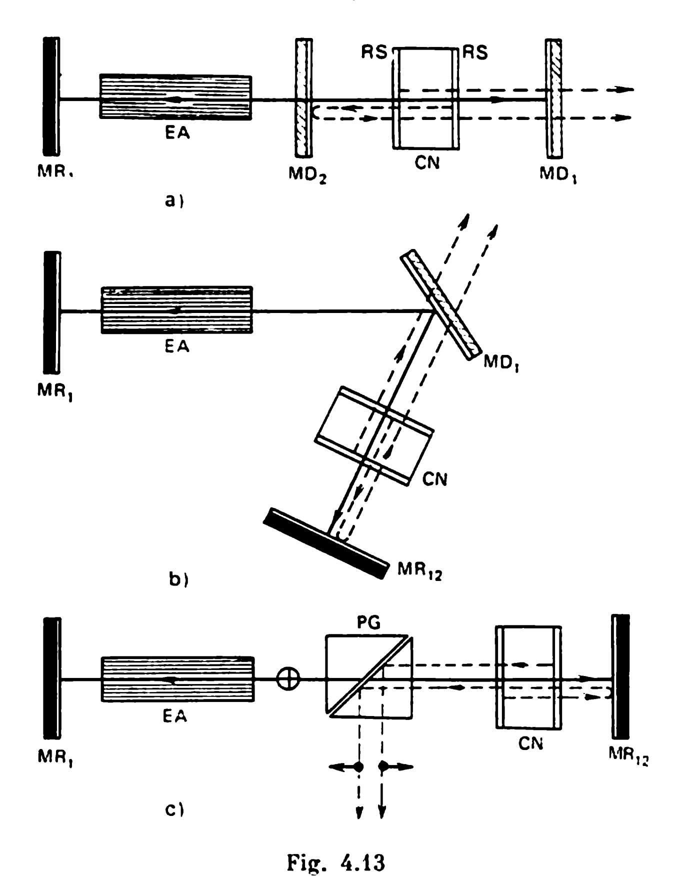


Fig. 4.13

le miroir de sortie. Le miroir dichroïque de renvoi peut être utilisé dans tous les schémas traités plus haut. Dans certains cas, le miroir de renvoi est porté directement sur la face terminale du cristal non linéaire orientée vers l'élément actif. Malheureusement, la fabrication d'un miroir dichroïque du second type (à haute réflexion à la fréquence 2ω et à haute transparence à la fréquence ω) de bonne qualité est un problème bien délicat à résoudre. Un écart même minime, par rapport au zéro, du coefficient de réflexion du miroir

à la fréquence fondamentale conduira à des pertes appréciables, comparables, comme le montre la pratique, aux pertes passives dans la cavité en l'absence du miroir de renvoi. Au point de vue technique, il est beaucoup plus facile d'usiner un bon miroir dichroïque du premier type (à haute transparence à la fréquence 2ω et à forte réflexion à la fréquence ω).

Reportons-nous à ce propos à la fig. 4.13, *b*. A la différence du schéma précédent on n'utilise ici qu'un seul miroir dichroïque qui est du premier type. Comme miroir de renvoi on utilise un miroir à réflexion totale aux deux fréquences (miroir MR_{12}). Un tel schéma permet, grâce à l'emploi d'une cavité de forme *coudée*, une sortie pratiquement totale du rayonnement du deuxième harmonique sans avoir recours à un miroir dichroïque du second type.

Si l'on utilise un prisme de Glan, on peut se passer des miroirs dichroïques. La fig. 4.13, *c* représente un schéma comportant un prisme de Glan placé entre le cristal non linéaire et l'élément actif, le miroir de renvoi étant MR_{12}. Malheureusement, comme il a été dit plus haut, l'introduction du prisme à l'intérieur de la cavité augmente considérablement les pertes.

Une variante bien intéressante du schéma représenté sur la fig. 4.13, *a* est celle dans laquelle le miroir de renvoi, placé entre l'élément actif et le cristal non linéaire, présente un coefficient optimal (et non nul) de réflexion à la fréquence fondamentale [8], [13]. On réalise ainsi un système de deux cavités couplées pour le rayonnement fondamental qui permet (à condition de choisir convenablement les paramètres) d'élever la puissance de rayonnement de pompage dans le cristal non linéaire. En outre, l'influence que les pertes dans le cristal non linéaire ont sur le processus de génération dans l'élément actif s'en trouve réduite.

Focalisation du rayonnement fondamental sur le cristal non linéaire [1]. — Dans les lasers à pompage continu les miroirs de

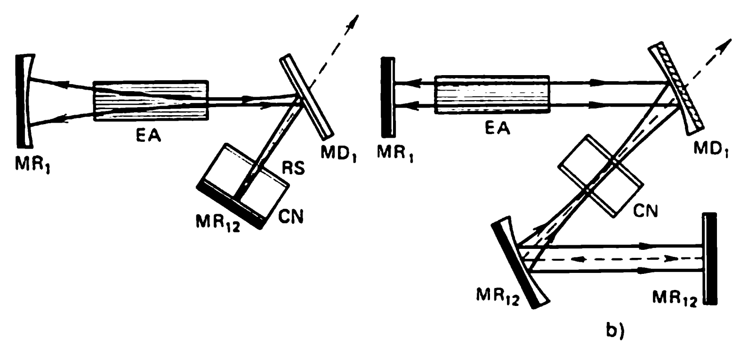


Fig. 4.14

cavité sont en règle générale de forme sphérique pour assurer la *focalisation* du rayonnement fondamental sur le cristal non linéaire. La fig. 4.14 montre deux schémas de ce type, dont celui de la

fig 4.14, *a* est l'analogue du schéma de la fig. 4.13, *b*. Il utilise une cavité semi-sphérique dans laquelle le cross-over du faisceau de rayonnement fondamental se situe dans le cristal non linéaire. Pour la focalisation du rayonnement on peut également utiliser un schéma dit à télescope placé à l'intérieur de la cavité, que l'on appelle sché-

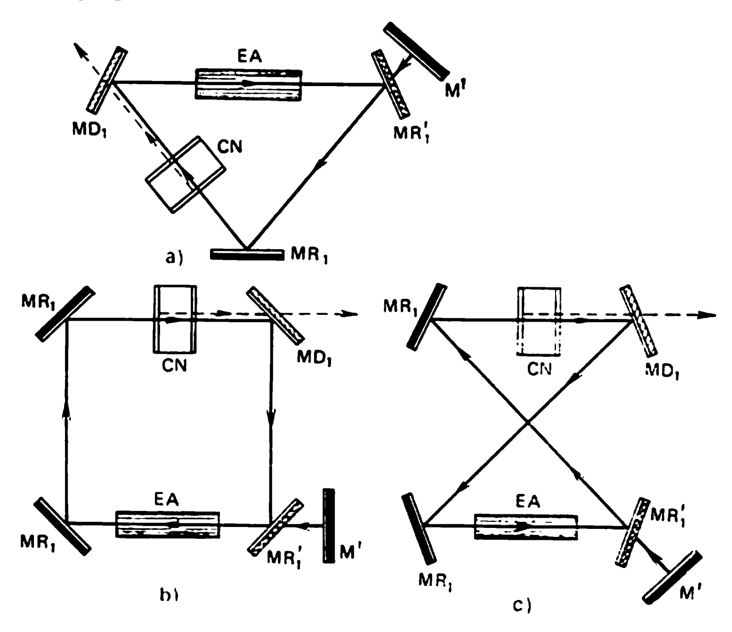


Fig. 4.15

ma *Z* (fig. 4.14, *b*). Le télescope est formé ici par deux miroirs qui focalisent le rayonnement fondamental sur le cristal non linéaire.

Schémas à génération unidirectionnelle de deuxième harmonique. — Les schémas de la GICDH dans les lasers en anneau permettent de réaliser une génération *unidirectionnelle* de deuxième harmonique. La fig. 4.15 en donne trois exemples. Pour supprimer la génération de l'onde opposée du rayonnement fondamental, ces schémas comportent un miroir additionnel M' ; le miroir de réflexion MR_1' doit présenter dans ce cas un petit coefficient de transparence à la fréquence fondamentale (∼0,01).

Schémas de la GICDH à duplication de fréquence en cascade. — La fig. 4.16 présente un schéma dans lequel le rayonnement du deuxième harmonique produit dans le cristal non linéaire CN' est utilisé pour le pompage du cristal non linéaire CN'' qui fait naître un quatrième harmonique (le rayonnement du quatrième harmonique est porté sur la figure en traits mixtes). Le miroir MD_1 déposé

dans ce cas directement sur la face terminale du cristal CN'' se caractérise par une haute transparence à la fréquence du deuxième harmonique et une forte réflexion à la fréquence du quatrième harmonique. Le miroir de sortie MD_2 présente au contraire une haute transparence à la fréquence du quatrième harmonique et une forte réflexion à la fréquence du deuxième harmonique. Le schéma est constitué par deux

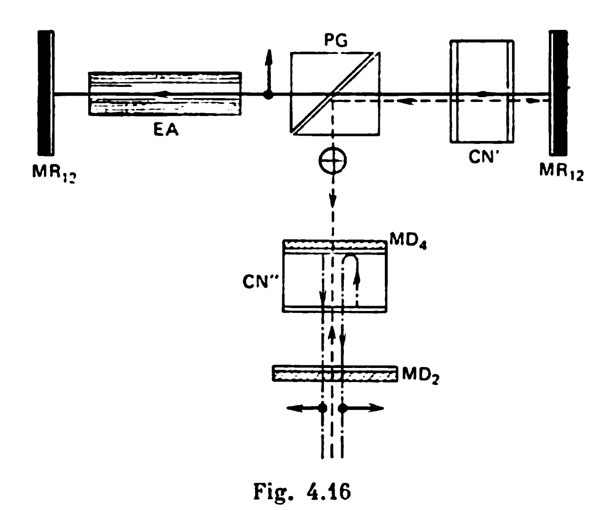


Fig. 4.16

cavités dont les axes sont perpendiculaires entre eux ; les miroirs MR_1 et MR_{12} forment la première cavité, et les miroirs MD_4 et MD_2, la seconde cavité. Le couplage entre les cavités est assuré par un prisme de Glan *PG*. La figure montre la direction de la polarisation rectiligne pour toutes les trois fréquences émises (ω, 2ω, 4ω). Le schéma considéré n'est évidemment applicable qu'à l'interaction *ooe* (pour la génération tant de deuxième que de quatrième harmonique).

§ 4.5. Laser à milieu actif non linéaire

Un pas suivant dans le développement des lasers à GICDH a été fait par l'élaboration et la réalisation d'un laser à *milieu actif non linéaire* (en abrégé MAN) par lequel on entend un cristal non linéaire devenu un élément actif grâce à l'activation par des ions appropriés. Dans un tel cristal il se produit *à la fois* la génération du rayonnement fondamental et la conversion optique non linéaire de ce rayonnement en deuxième harmonique. Ces dernières années la théorie des lasers à MAN fait l'objet des études assez actives [23] à [25].

L'intérêt que suscitent les lasers à MAN s'explique par certains avantages qu'ils offrent par rapport aux lasers dans lesquels l'élément actif et le cristal non linéaire sont séparés l'un de l'autre (lasers à $EA + CN$). Les pertes non linéaires dans le MAN limitent la densité de puissance du rayonnement fondamental et donc rendent moins important le rôle de la saturation de l'amplification, ce qui permet d'augmenter l'efficacité du pompage. Comme le montrent les calculs, dans les lasers à MAN la valeur optimale du coefficient de couplage non linéaire (d'après le maximum de puissance de sortie du deuxième harmonique) est d'environ 3 à 5 fois plus petite que dans les mêmes lasers à $EA + CN$, de sorte qu'on peut se servir des cristaux à coefficient de couplage non linéaire plus faible. Les lasers à MAN n'exigent évidemment pas d'effectuer la focalisation du rayonnement, par suite, le volume du cristal non linéaire est utilisé plus efficacement. En outre, l'utilisation de MAN assure certains avantages d'exploitation. Ainsi, le remplacement de deux éléments placés à intérieur de la cavité par un seul élève la fiabilité de l'équipement, rend plus facile l'ajustage, diminue les pertes de Fresnel, rend inutile la mise en phase des ondes dans les intervalles entre les éléments, etc.

Milieux actifs non linéaires. — Il existe plusieurs cristaux non linéaires qui peuvent être utilisés comme MAN [26]. Ce sont les cristaux de niobate de lithium activés par les ions de néodyme, de thulium ou de holmium ($LiNbO_3$:Nd^{3+}; $LiNbO_3$:Tm^{3+}; $LiNbO_3$:Ho^{3+}) [27], [28], de niobate de baryum-sodium avec néodyme ($Ba_2NaNb_5O_{15}$:Nd^{3+}) [29], de borate d'yttrium-aluminium avec néodyme ($Nd_{0.2}Y_{0.8}Al_3(BO_3)_4$) [30] et certains autres.

La réalisation de l'émission induite dans le cristal de $LiNbO_3$: Nd^{3+} a été annoncée pour la première fois en 1967 [27]. Le rayonnement fondamental était émis à 1,0846 μm et sa polarisation correspondait à l'onde extraordinaire. Comme la polarisation du rayonnement fondamental dans un laser à automultiplication de fréquence doit correspondre à l'onde ordinaire, il semblait à première vue que le cristal de $LiNbO_3$: Nd^{3+} soit inapte à servir de milieu actif non linéaire. Pourtant, peu de temps après, on a obtenu une transition stimulée à la longueur d'onde de 1,093 μm dont la polarisation du rayonnement correspondait à l'onde ordinaire [31]. Après cela on a commencé à étudier activement, par des méthodes spectroscopiques, les caractéristiques laser du cristal de $LiNbO_3$: Nd^{3+}. Dans l'ouvrage [32] on a étudié un laser à base de $LiNbO_3$: Nd^{3+} pompé au moyen d'un laser à krypton auxiliaire. Il a été établi que son gain d'amplification n'était que légèrement inférieur à celui du laser à YAG: Nd^{3+}.

Equations tronquées pour le laser à MAN fonctionnant en régime stationnaire. — Nous partirons du système d'équations raccourcies (2.2.28) en nous limitant ainsi à l'approximation des ondes planes interagissantes et au régime continu. Commençons par récrire le système (2.2.28) en passant des amplitudes réelles a_1 et a_2 aux densités de puissance $S_1^{\pm}(z)$ et $S_2^{\pm}(z)$ et en posant $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma/2$,

$2\delta_1 = \rho_1$, $2\delta_2 = \rho_2$:

$$\left.\begin{aligned} &\pm \frac{dS_1^{\pm}}{dz} + \rho_1 S_1^{\pm} + \sigma S_1^{\pm} \sqrt{S_2^{\pm}} \sin \Psi^{\pm} = 0 ; \\ &\pm \frac{dS_2^{\pm}}{dz} + \rho_2 S_2^{\pm} - \sigma S_1^{\pm} \sqrt{S_2^{\pm}} \sin \Psi^{\pm} = 0 ; \\ &\pm \frac{d\Psi^{\pm}}{dz} - \Delta k - \sigma \frac{S_2^{\pm} - S_1^{\pm}/2}{\sqrt{S_2^{\pm}}} \cos \Psi^{\pm} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.5.1)$$

(ici, les indices 1 et 2 se rapportent respectivement à la fréquence fondamentale et à la fréquence de deuxième harmonique, alors que les indices + et — désignent les ondes qui se propagent dans le sens des z positifs et négatifs respectivement).

Pour décrire l'émission laser à la fréquence fondamentale il faut compléter le coefficient d'absorption ρ_1 par un terme qui tient compte de l'absorption non linéaire *négative* (c'est-à-dire de l'*amplification*) du rayonnement fondamental. Autrement dit, au lieu de ρ_1 il faut utiliser

$$\rho_1 - \varkappa_0/[1 + \beta (S_1^+ + S_1^-)],$$

où $\varkappa_0$ est le gain d'amplification initial ; β, le paramètre de non-linéarité [v. (4.2.26)]. Le système d'équations tronquées (4.5.1) prend alors la forme suivante:

$$\boxed{\begin{aligned} &\pm \frac{dS_1^{\pm}}{dz} + \rho_1 S_1^{\pm} - \frac{\varkappa_0 S_1^{\pm}}{1 + \beta (S_1^+ + S_1^-)} + \sigma S_1^{\pm} \sqrt{S_2^{\pm}} \sin \Psi^{\pm} = 0 ; \\ &\pm \frac{dS_2^{\pm}}{dz} + \rho_2 S_2^{\pm} - \sigma S_2^{\pm} - \sigma S_1^{\pm} \sqrt{S_2^{\pm}} \sin \Psi^{\pm} = 0 ; \\ &\pm \frac{d\Psi^{\pm}}{dz} - \Delta k - \sigma \frac{S_2^{\pm} - S_1^{\pm}/2}{\sqrt{S_2^{\pm}}} \cos \Psi^{\pm} = 0. \end{aligned}} \qquad (4.5.2)$$

Les densités de puissance des faisceaux lumineux interagissants sont reliées par les conditions aux limites sur les miroirs de cavité résonnante. En supposant que la cavité est entièrement remplie de MAN de longueur L, écrivons ces conditions dans le cas général sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &S_1^+(0) = R_1(0) S_1^-(0) ; \; S_1^-(L) = R_1(L) S_1^+(L); \\ &S_2^+(0) = R_2(0) S_2^-(0) ; \; S_2^-(L) = R_2(L) S_2^+(L), \end{aligned}\right\} \qquad (4.5.3)$$

où R_1 et R_2 sont respectivement les coefficients de réflexion des miroirs à la fréquence fondamentale et à celle du deuxième harmonique.

Supposons que le désaccord d'onde soit nul ($\Delta k = 0$). Dans ce cas on peut poser $\Psi = \pi/2$. Il en résulte une simplification considé-

rable du système (4.5.2):

$$\pm\frac{dS_1^{\pm}}{dz}+\rho_1 S_1^{\pm}-\frac{\varkappa_0 S_1^{\pm}}{1+\beta(S_1^{+}+S_1^{-})}+\sigma S_1^{\pm}\sqrt{S_2^{\pm}}=0;$$
$$\pm\frac{dS_2^{\pm}}{dz}+\rho_2 S_2^{\pm}-\sigma S_1^{\pm}\sqrt{S_2^{\pm}}=0. \qquad (4.5.4)$$

Condition d'émission continue. — Supposons que le miroir de gauche ($z = 0$) réfléchit totalement tant le rayonnement fondamental que celui de deuxième harmonique: $R_1(0) = R_2(0) = 1$, alors que le miroir de droite ($z = L$) est totalement transparent au deuxième harmonique et présente un certain coefficient de réflexion R à la fréquence fondamentale: $R_2(L) = 0$; $R_1(L) = R$. Dans ce cas les conditions (4.5.3) deviennent

$$S_1^{+}(0)=S_1^{-}(0);\ S_1^{-}(L)=RS_1^{+}(L);\ S_2^{+}(0)=S_2^{-}(0). \qquad (4.5.5)$$

En se servant de la première équation du système (4.5.4), on trouve

$$\left.\begin{aligned} S_1^{+}(L)&=S_1^{+}(0)\exp[(\varkappa-\rho_1-\rho_{nl}^{+})L];\\ S_1^{-}(0)&=S_1^{-}(L)\exp[(\varkappa-\rho_1-\rho_{nl}^{-})L],\end{aligned}\right\} \qquad (4.5.6)$$

où $\varkappa$ est le gain moyenné sur la longueur du MAN (sur la longueur de la cavité),

$$\varkappa=\frac{1}{L}\int_0^L\frac{\varkappa_0 dz}{1+\beta[S_1^{+}(z)+S_1^{-}(z)]}; \qquad (4.5.7)$$

$\rho_{nl}^{\pm}$ sont les coefficients de pertes non linéaires moyennés sur la longueur du MAN qui caractérisent les pertes du rayonnement fondamental par conversion en deuxième harmonique:

$$\rho_{nl}^{\pm}=\frac{1}{L}\int_0^L\sigma\sqrt{S_2^{\pm}(z)}\,dz. \qquad (4.5.8)$$

De (4.5.6) et (4.5.5) on déduit que

$$\varkappa=\rho_1+\rho_{nl}+\rho_{ray}, \qquad (4.5.9)$$

où

$$\rho_{nl}=(\rho_{nl}^{+}+\rho_{nl}^{-})/2;\ \rho_{ray}=\ln(1/R)/2L. \qquad (4.5.10)$$

La relation (4.5.9) traduit la *condition d'émission continue* d'un laser à milieu actif non linéaire: la valeur moyenne du gain d'amplification est égale à la somme des coefficients de pertes passives (ρ_1), de pertes liées à la conversion en deuxième harmonique (ρ_{nl}) et de pertes liées à la sortie du rayonnement fondamental de la cavité à travers le miroir de sortie (ρ_{ray}).

Coefficient de pertes non linéaires. — Obtenons des expressions analytiques approchées pour pouvoir constater qu'elles donnent des résultats coïncidant pratiquement avec ceux que l'on obtient en résolvant les équations (4.5.4) sur ordinateur. Commençons par le coefficient de pertes non linéaires.

En partant de la seconde équation du système (4.5.4), on peut obtenir la relation suivante:

$$\sqrt{S_2^{\mp}(z)} = \pm \frac{\sigma}{2} \exp\left(\mp\rho_2 \frac{z}{2}\right) \int_0^z S_1^{\pm}(Z) \exp\left(\pm \rho_2 \frac{Z}{2}\right) dZ. \quad (4.5.11)$$

Puis, en tenant compte de ce que

$$S_1^{+}(L)/S_1^{+}(0) = S_1^{-}(0)/S_1^{-}(L) = 1/\sqrt{R}, \quad (4.5.12)$$

on peut représenter $S_1^{\pm}(Z)$ de façon approchée par la dépendance linéaire suivante:

$$S_1^{\pm}(Z) \approx S_1^{\pm}(0)\,[1-(1-R^{\mp 1/2})\,Z/L]. \quad (4.5.13)$$

En reportant (4.5.13) dans (4.5.11) et (4.5.11) dans (4.5.8), on obtient en définitive l'expression approchée suivante pour le coefficient de pertes non linéaires:

$$\rho_{nl} \approx \frac{\sigma^2 L}{6}\left[\frac{1}{4}(1+5\sqrt{R})(1+\sqrt{R}) - \rho_2 LR\right] S_1^{+}(L). \quad (4.5.14)$$

Densité de puissance de sortie du rayonnement fondamental et du rayonnement du deuxième harmonique. — Introduisant (4.5.13) dans (4.5.7), on trouve en première approximation

$$\varkappa \approx \varkappa_0\,[1+2\beta\sqrt{R}S_1^{+}(L)]^{-1}. \quad (4.5.15)$$

En faisant usage des expressions (4.5.15), (4.5.14), (4.5.11) et (4.5.9), on obtient les résultats suivants:

$$\sqrt{S_2^{+}(L)} = \frac{\sigma L}{4}\,[(1+\sqrt{R})^2 - \rho_2 LR]\,S_1^{+}(L)\,; \quad (4.5.16)$$

$$S_1^{+}(L) = [\sqrt{B^2+2(\varkappa_0-\rho_1-\rho_{ray})A} - B]/4\beta RA, \quad (4.5.17)$$

avec

$$B = \frac{1}{2}(\rho_1+\rho_{ray}) + A\,; \quad (4.5.18a)$$

$$A = \sigma^2 L\left[\frac{1}{4}(1+5\sqrt{R})(1+\sqrt{R}) - \rho_2 LR\right]/24\beta\sqrt{R}. \quad (4.5.18b)$$

Ces résultats déterminent la densité de puissance de sortie du rayonnement fondamental et celle du deuxième harmonique: $S_{1\,sor} =$

$= S_1^+ (L) (1 - R)$, $S_{2\,\mathrm{sor}} = S_2^+ (L)$. Les expressions (4.5.16) à (4.5.18) permettent de calculer les caractéristiques énergétiques d'un laser à MAN pour une valeur quelconque du coefficient de réflexion du miroir de sortie à la fréquence fondamentale [en utilisant la fonction linéaire (4.5.13)].

La fig. 4.17 représente les courbes des fonctions $S_{1\,\mathrm{sor}} (R)$ (en traits pleins) et $S_{2\,\mathrm{sor}} (R)$ (en traits interrompus), obtenues sur la base des expressions (4.5.16) à (4.5.18) et construites pour les valeurs suivantes du gain d'amplification initial : $\varkappa_0 = 0{,}04$ cm^{-1} (cou-

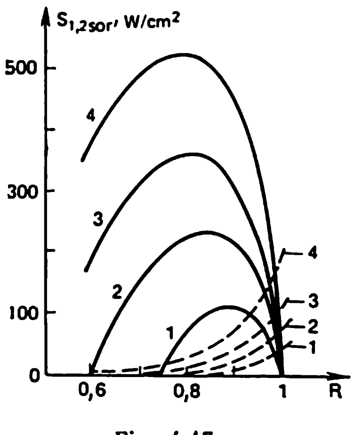


Fig. 4.17

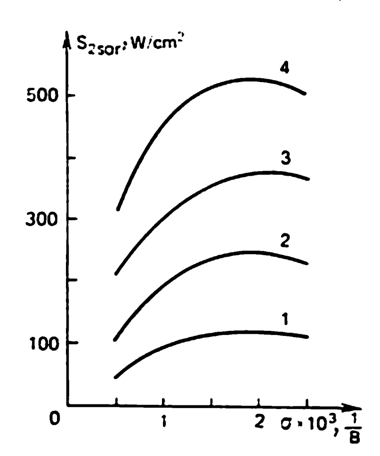


Fig. 4.18

rbes *1*) ; $\varkappa_0 = 0{,}06$ cm^{-1} (courbes *2*) ; $\varkappa_0 = 0{,}08$ cm^{-1} (courbes *3*) ; $\varkappa_0 = 0{,}1$ cm^{-1} (courbes *4*). Ces courbes ont été calculées pour $L = 5$ cm, $\beta = 0{,}44 \cdot 10^{-3}$ cm²/W, $\sigma = 0{,}37 \cdot 10^{-3}$ W^{-1}, $\rho_1 = \rho_2 = 0{,}01$ cm^{-1}. La comparaison des courbes de la fig. 4.17 et des résultats des calculs effectués sur ordinateur d'après les équations (4.5.4), avec les conditions (4.5.5), montre que l'écart entre eux ne dépasse pas 5 %.

En examinant la fig. 4.17, nous voyons en particulier que pour obtenir des valeurs élevées de la densité de puissance de sortie du deuxième harmonique il faut fermer la cavité pour la fréquence fondamentale (c'est-à-dire poser $R = 1$). En posant $R = 1$, on peut trouver, à partir des expressions obtenues plus haut, la fonction $S_{2\,\mathrm{sor}} (\sigma)$ et donc déterminer la valeur optimale du coefficient de couplage non linéaire σ pour laquelle $S_{2\,\mathrm{sor}}$ atteint son maximum. Les courbes représentatives de cette fonction sont montrées à la fig. 4.18. Les courbes *1* à *4* correspondent aux mêmes valeurs de $\varkappa_0$ que les courbes correspondantes de la fig. 4.17. Les valeurs des paramètres L, β, ρ_1, ρ_2 sont les mêmes que pour la fig. 4.17.

§ 4.6. GICDH dans les lasers déclenchés pompés par impulsions

Remarques générales. — Comme il a été dit au § 4.1, le rapport de la puissance développée à l'intérieur de la cavité résonnante à la valeur optimale de la puissance de sortie est beaucoup plus petit pour les lasers pompés par impulsion que pour les lasers à pompage continu. Ceci tient à ce que le pompage par impulsion réalise des valeurs élevées du gain d'amplification initiale, de sorte que la valeur optimale du coefficient de réflexion $R_{1\ opt}$ du miroir de sortie se trouve relativement petite (20 à 40 %). D'après la formule (4.1.1), la valeur optimale du coefficient de conversion en deuxième harmonique η_{opt} est comprise entre 80 et 60 %. Une telle efficacité de la conversion est plus facile à réaliser dans le schéma à génération intracavité de deuxième harmonique. C'est pourquoi au premier abord l'utilisation de la GICDH dans les lasers pulsés ne semble pas judicieuse.

Pourtant, en partant des considérations générales, on peut arriver à cette conclusion que le problème de l'amélioration du rendement global d'un laser émettant à une fréquence harmonique peut être résolu en particulier par réduction de l'énergie de l'impulsion de pompage. Dans ce cas, le régime de GICDH peut s'avérer suffisamment efficace. En effet, lorsque l'énergie de l'impulsion de pompage diminue, le gain d'amplification initial diminue, $R_{1\ opt}$ augmente. Du fait qu'en vertu de (4.2.35) le coefficient optimal de couplage γ_{opt} est indépendant du gain d'amplification initial, le régime optimal peut être obtenu par un choix convenable du paramètre γ pour toute énergie du pompage. Il est évident qu'en diminuant l'énergie de l'impulsion de pompage jusqu'à des valeurs pour lesquelles la génération intracavité de deuxième harmonique devient inefficace alors que $R_{1\ opt}$ se rapproche de 100 %, on peut arriver à une situation dans laquelle le régime de GICDH devient préférable.

Observons qu'une situation analogue se présente aussi dans le cas des fortes énergies de l'impulsion de pompage lorsque le laser passe de la transition principale (caractérisée par une grande section efficace) à une transition de section efficace relativement petite (gain d'amplification initial faible). Par exemple, pour le laser à YAG à néodyme ceci correspond au passage de la longueur d'onde émise de 1,06 μm à la longueur d'onde de 1,32 μm [26]; dans ce cas, le gain d'amplification initial diminue de 5 à 7 fois alors que $R_{1\ opt}$ accuse une croissance considérable.

Questions de la théorie du régime de GICDH à pompage par impulsion. — Le modèle « ponctuel » du laser à GICDH pompé par impulsion qui est développé d'une manière suffisamment détaillée (v. par exemple [9]) décrit d'une façon satisfaisante les facteurs caractérisant la GICDH tels que la valeur optimale du coefficient de couplage non linéaire, l'augmentation de la puissance de crête du

deuxième harmonique de $\sqrt{2}$ fois par rapport à la puissance de sortie optimale du rayonnement fondamental et autres. En même temps ce modèle n'explique pas les phénomènes tels que l'existence de deux régions d'énergie de pompage dans lesquelles est réalisée une conversion optimale, les lois régissant l'allongement de l'impulsion observée au régime de surconversion, l'automodulation des impulsions du

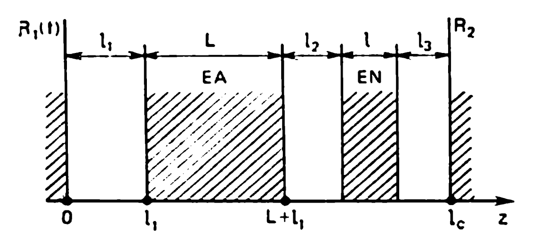


Fig. 4.19

deuxième harmonique et de fréquence fondamentale. Ceci signifie qu'il faut considérer des équations différentielles aux dérivées partielles en tenant compte du régime essentiellement non linéaire de conversion du rayonnement fondamental en deuxième harmonique.

En suivant l'ouvrage [6], examinons le processus du développement de l'émission laser dans une cavité résonnante de longueur l_c remplie en partie par un milieu actif (de longueur L) et en partie par un milieu non linéaire (de longueur l) ; v. fig. 4.19. Considérons les densités de puissance $S^{\pm}_{1,2}(z, t)$, où les indices 1 et 2 se rapportent respectivement au rayonnement fondamental et à celui du deuxième harmonique alors que les signes + et — indiquent la propagation des ondes suivant les z positifs et les z négatifs respectivement. Puisque dans les lasers pulsés à modulation relativement rapide du facteur de qualité le temps de développement et la durée de l'impulsion émise sont en règle générale suffisamment petits (non supérieurs à 10^{-7} s) par rapport aux temps caractéristiques de l'émission spontannée ainsi que par rapport au temps d'action du pompage, l'influence de ces processus sur le développement de l'impulsion géante peut être négligée. A cette approximation, le système d'équations du bilan prend la forme [1])

$$\left.\begin{aligned} &\partial S_1^+/\partial z+\frac{1}{v}\,\partial S_1^+/\partial t=(\varkappa-\rho)\,S_1^+;\\ &-\partial S_1^-/\partial z+\frac{1}{v}\,\partial S_1^-/\partial t=(\varkappa-\rho)\,S_1^-;\\ &\partial\varkappa/\partial t=-2\sigma\varkappa\,(S_1^++S_1^-)/\hbar\omega, \end{aligned}\right\} \tag{4.6.1}$$

[1]) Voir [33], ainsi que § 3.6 (équations (3.6.42) de [11]).

où $\varkappa$ est le gain d'amplification ; ρ, le coefficient de pertes passives ; σ, la section efficace de la transition lasante (ne pas confondre avec les coefficients de couplage non linéaire σ_1 et σ_2).

Le coefficient de réflexion du miroir de gauche de la cavité varie dans le temps ($t \geqslant 0$) suivant une loi

$$R_1(t) = R_1(0) + [R_1(\infty) - R_1(0)] \operatorname{th}^2 (2t/\tau_{\text{décl}}), \qquad (4.6.2)$$

qui est voisine de la loi observée expérimentalement lors du déclenchement au moyen d'un interrupteur électro-optique (ici, $R_1(0)$ et $R_1(\infty)$ sont les valeurs initiale et finale du coefficient de réflexion, $\tau_{\text{décl}}$ est le temps caractéristique de déclenchement); pour $t < 0$ l'interrupteur est fermé et le laser n'oscille pas. La présence dans la cavité d'un milieu non linéaire est prise en compte par l'introduction d'un miroir « non linéaire » présentant un coefficient de réflexion R_2 qui varie non linéairement en fonction de la densité de puissance du rayonnement tombant sur le miroir S_1^+:

$$S_1^-(L + l_1, t) = R_2(S_1^+) S_1^+(L + l_1, t - \tau_2); \qquad (4.6.3)$$

où τ_2 est le double du temps de parcours par la lumière de la distance $l_2 + l + l_3$ (v. fig. 4.19):

$$\tau_2 = 2(l_2 + ln + l_3)/c \qquad (4.6.4)$$

(n étant l'indice de réfraction du cristal non linéaire). Pour la face terminale de gauche de l'élément actif on a

$$S_1^+(l_1, t) = R_1(t - \tau_1/2) S_1^-(l_1, t - \tau_1), \qquad (4.6.5)$$

avec

$$\tau_1 = 2l_1/c. \qquad (4.6.6)$$

Pour l'étape initiale du développement de la génération, lorsqu'on peut poser $\varkappa = \varkappa_0$, $R_1 \approx R_1(0)$ et négliger les pertes non linéaires par génération de deuxième harmonique, la solution du système d'équations (4.6.1) est de la forme

$$S_1^+(z, t) = S_0 \exp[\alpha(t - \tau_1 - z/v) + (\varkappa_0 - \rho)(L + z) + \ln R_1(0)]; \qquad (4.6.7)$$

$$S_1^-(z, t) = S_0 \exp[\alpha(t + z/v) + (\varkappa_0 - \rho)(L - z)], \qquad (4.6.8)$$

$$\left.\begin{array}{c} \alpha = 2(\varkappa_0 - \rho - \rho_{\text{ray}}^0)\dfrac{L}{\tau_0}; \quad \rho_{\text{ray}}^0 = \dfrac{1}{2L} \ln \dfrac{1}{R_1(0) R_2(0)}; \\ \tau_0 = \tau_1 + \tau_2 + 2L/v \end{array}\right\} \qquad (4.6.9)$$

[$R_2(0)$ étant la valeur initiale du coefficient de réflexion du miroir de droite (en l'absence de génération de deuxième harmonique), S_0, une constante déterminée par le niveau de l'émission spontanée].

Les équations (4.6.1) sont à résoudre sur ordinateur conjointement avec (4.6.2) à (4.6.6). Ce faisant, on suppose que le miroir placé

à l'extrémité de droite de la cavité résonnante réfléchit totalement le rayonnement fondamental et partiellement (avec le coefficient de réflexion R), le rayonnement du deuxième harmonique.

GICDH dans le cas où la condition de synchronisme est exactement satisfaite. — En posant $\Delta k = 0$ et en utilisant (2.3.23), on obtient l'expression suivante pour le coefficient de réflexion du miroir « non linéaire »:

$$R_2(S_1^+) = [\mathrm{sch}^2 Q + R\,\mathrm{th}^2 Q]\,\mathrm{sch}^2\{(q_0+q) \times \times [S_1^+(\mathrm{sch}^2 Q + R\,\mathrm{th}^2 Q)]^{1/2}\}, \qquad (4.6.10)$$

où $Q = q\sqrt{S_1^+}$; $q = \sigma_1 l \sqrt{8\pi/cn}$;

$$q_0 = \frac{1}{[S_1^+(\mathrm{sch}^2 Q + R\,\mathrm{th}^2 Q)]^{1/2}}\,\mathrm{Arth}\sqrt{\frac{R\,\mathrm{th}^2 Q}{\mathrm{sch}^2 Q + R\,\mathrm{th}^2 Q}}\,. \qquad (4.6.11)$$

Choisissons le temps de déclenchement $\tau_{\text{déc}}$ entrant dans (4.6.2) de telle sorte que $\tau_0 < \tau_{\text{déc}} < \tau_{\text{dév}}$, où $\tau_{\text{dév}}$ est le temps de développement de la densité de puissance à partir de S_0 jusqu'au niveau de 0,1 de la densité maximale; ceci permet d'exclure des effets annexes qui se manifestent lorsque le temps de déclenchement est fini.

Les oscillogrammes caractéristiques des impulsions d'onde directe du deuxième harmonique

$$S_2^+ = S_1^+(1-R)\,\mathrm{th}^2 Q, \qquad (4.6.12)$$

obtenus sur ordinateur pour différentes valeurs des paramètres $\varkappa_0$ et q à $R = 0{,}1$, $\rho = 0{,}05$ cm^{-1}, $q_1 = 4{,}5\cdot 10^{-5}$ cm/W$^{1/2}$, sont représentés par les fig. 4.20, *a*) pour $\varkappa_0 = 0{,}6$ cm^{-1}, $q' \equiv q/q_1 = 2$ (courbe *1*), $q' = 6$ (courbe *2*), $q' = 10$ (courbe *3*) et 4.20, *b*) pour $\varkappa_0 = 0{,}1$ cm^{-1}, $q' = 4$ (courbe *1*), $q' = 5$ (courbe *2*), $q' = 10$ (courbe *3*). On voit que pour une forte valeur du gain d'amplification initial et $q > q_{\text{opt}}$ (courbes *2* et *3* de la fig. 4.20, *a*) l'impulsion de deuxième harmonique possède une substructure temporelle et que les maximums de picots secondaires augmentent en même temps que q. D'un autre côté, pour des valeurs plus faibles de $\varkappa_0$ et $q > q_{\text{opt}}$, on observe un allongement appréciable de l'impulsion de deuxième harmonique (courbe *3* de la fig. 4.20, *b*).

La fig. 4.21 représente les courbes, qui ont un intérêt pratique, de variation, en fonction du paramètre q', de l'énergie de sortie E_2^+ de l'impulsion de deuxième harmonique (en traits interrompus) et de la densité de puissance de l'impulsion de deuxième harmonique S_2^+ (en traits pleins). Les calculs ont été faits pour $\rho = 0{,}05$ cm^{-1}, la surface de la section transversale du faisceau de 0,1 cm^2; $\varkappa_0 = 0{,}6$ cm^{-1} (fig. 4.21, *a*) et $\varkappa_0 = 0{,}1$ cm^{-1} (fig. 4.21, *b*). On voit que la densité de puissance atteint sa valeur maximale pour un certain $q' = q'_{\text{opt}}$ et que q'_{opt} diminue lorsque $\varkappa_0$ augmente, alors que l'énergie de

l'impulsion de deuxième harmonique passe à la saturation lorsque q' augmente.

Les courbes de la fig. 4.22 présentent elles aussi de l'intérêt. Elles montrent la variation du paramètre $q'_{opt} = q_{opt}/q_1$ en fonction

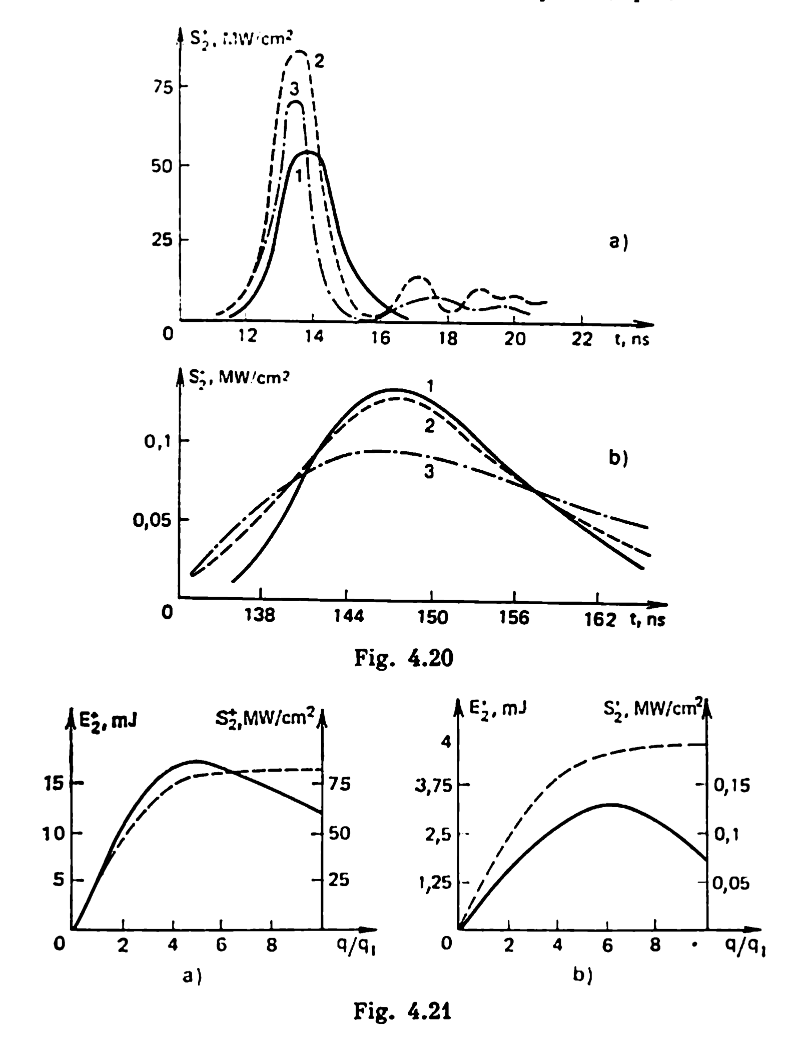


Fig. 4.20

Fig. 4.21

du gain d'amplification initial $\varkappa_0$ pour $\rho = 0{,}01\ \mathrm{cm}^{-1}$ (courbe *1*) et pour $\rho = 0{,}05\ \mathrm{cm}^{-1}$ (courbe *2*); les calculs ont été faits pour $R = 0{,}1$, $L = 5$ cm. En examinant la figure, nous voyons qu'il y a non pas un seul mais deux points (régions) de conversion optimale en rayonnement de deuxième harmonique suivant le gain d'amplifica-

tion initial. Autrement dit, pour certaines valeurs de q_{opt} (ou, si le paramètre σ_1 est fixé, pour certaines valeurs de l_{opt}), il existe deux valeurs du paramètre $\varkappa_0$ (ou de l'énergie de pompage) pour lesquelles est réalisée la conversion optimale en deuxième harmonique.

Les courbes de variation de l'efficacité de la conversion optimale en deuxième harmonique dans le sens direct η_{opt}^+ en fonction du gain d'amplification initial $\varkappa_0$ sont données à la fig. 4.23; la cou-

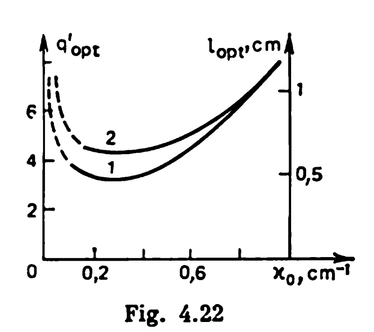


Fig. 4.22

Fig. 4.23

rbe *1* pour $R = 0$ et la courbe *2* pour $R = 0{,}1$. Par efficacité de la conversion on entend le rapport des énergies de sortie des impulsions de deuxième harmonique et de fréquence fondamentale, l'énergie du deuxième harmonique étant déterminée dans les conditions du calcul effectué, alors que l'énergie du rayonnement fondamental est calculée en l'absence de conversion en deuxième harmonique pour la valeur optimale, au point de vue de l'énergie, du coefficient de réflexion du miroir de sortie pour la longueur d'onde fondamentale. Comme il est visible sur la figure, pour $R = 0$ l'efficacité de la conversion η_{opt}^+ tend vers 100 % lorsque $\varkappa_0$ augmente. Au régime de conversion optimale l'efficacité de la conversion en harmonique dans les deux sens est égale à 100 % quel que soit $\varkappa_0$. Or, la réalisation d'une telle conversion à 100 % exige d'introduire dans la cavité résonnante des éléments optiques spéciaux (prismes, miroirs de renvoi et certains autres) qui occasionnent des pertes supplémentaires.

Bibliographie

1. **Zernike F., Midwinter I.** Applied Nonlinear Optics. — New York, 1973.
2. **Smith R. G.** Theory of intracavity optical second harmonic generation. — IEEE, 1970, v. QE-6, nº 4.
3. **Дмитриев В. Г., Шалаев Е. А., Швом Е. М.** Эффективная внутрирезонаторная генерация второй гармоники. — В кн.: Квантовая электроника/Под ред. Н. Г. Басова. — М.: Сов. радио, 1973, вып. 5.
4. **Исянова Е. Д., Овчинников В. М.** Генерация моноимпульсов в резонаторе, преобразующем излучение во вторую гармонику. — Оптика и спектроскопия, 1972, т. 32, № 1.

5. **Дмитриев В. Г., Шалаев Е. А.** Об увеличении длительности импульса излучения лазера на ИАГ: Nd^{+3} в режиме электрооптической модуляции добротности с внутрирезонаторной генерацией второй гармоники. — Квантовая электроника, 1979, т. 6, № 1.
6. **Дмитриев В. Г., Ицхоки И. Я.** К теории внутрирезонаторной генерации второй гармоники. — Квантовая электроника, 1975, т. 2, № 7.
7. **Дмитриев В. Г., Денисов А. Н., Шалаев Е. А.** Влияние квадратичной нелинейности на необходимые условия спонтанной синхронизации мод лазера на YAG: Nd^{+3}. — Квантовая электроника, 1978, т. 5, № 11.
8. **Дмитриев В. Г., Корниенко Н. Е., Рыжков А. И., Стрижевский В. Л., Шалаев Е. А.** Внутрирезонаторная генерация второй оптической гармоники при наличии волновой расстройки. — Квантовая электроника, 1976, т. 3, № 2.
9. **Дмитриев В. Г., Новокрещенов В. К.** Амплитудно- и фазовочастотные характеристики лазера на АИГ: Nd^{3+} с внутрирезонаторной генерацией второй гармоники. — Квантовая электроника, 1977, т. 4, № 7.
10. **Голяев Ю. Д., Дмитриев В. Г., Фомичев А. Н.** Избыточные флуктуации мощности излучения второй гармоники непрерывных лазеров на гранате. — В кн.: Тезисы докладов 8 Всесоюзн. конф. по когерентной и нелинейной оптике. — Тбилиси: Мецниерба, 1976.
11. **Tarassov L.** Physique des processus dans les générateurs de rayonnement optique cohérent. — Moscou, Editions Mir, 1985.
12. **Дмитриев В. Г., Кушнир В. Р., Рустамов С. Р., Фомичев А. А.** Оптимизация параметров ОКГ на алюмо-иттриевом гранате с неодимом в квазинепрерывном режиме генерации с нелинейным элементом внутри резонатора. — В кн.: Квантовая электроника/Под ред. Н. Г. Басова. — М.: Сов. радио, 1972, вып. 2.
13. **Волосов В. Д., Карпенко С. Г., Корниенко Н. Е., Крылов В. Н., Стрижевский В. Л., Манько А. А.** Внутрирезонаторная генерация второй оптической гармоники. — Квантовая электроника, 1975, т. 2, № 5.
14. **Волосов В. Д., Корниенко Н. Е., Крылов В. Н., Рыжков А. И., Стрижевский В. Л.** — Фазовые эффекты при внутрирезонаторной генерации второй оптической гармоники. — Оптика и спектроскопия, 1979, т. 46, № 1.
15. **Конвисар П. Г., Рустамов С. Р., Фомичев А. А.** Влияние термически индуцированного двулучепреломления активного элемента на внутрирезонаторную генерацию гармоники при непрерывной накачке. — Квантовая электроника, 1974, т. 1, № 3.
16. **Ханин Я. И.** Динамика квантовых генераторов. — М.: Сов. радио, 1975.
17. **Chesler R. B., Karr M. A., Geusic J. E.** An Experimental and Theoretical Study of High Repetition Rate Q-Switched Nd: YAG Lasers. — IEEE, 1970, v. 58.
18. **Конвисар П. Г., Фомичев А. А.** Оптимизация и устойчивость YAG: Nd-лазера с непрерывной накачкой в режиме глубокой внутрирезонаторной модуляции. — Квантовая электроника, 1981, т. 8, № 6.
19. **Конвисар П. Г., Рустамов С. Р., Силичев О. О., Фомичев А. А.** Непрерывно накачиваемый твердотельный лазер в режиме глубокой модуляции нагрузки. — ЖТФ, 1979, т. 49, № 2.
20. **Chesler R. B., Maydan D.** Calculation of YAIG: Nd cavity dumping. — J. Appl. Phys., 1971, v. 42, N° 3.
21. **Maydan D., Chesler R. B.** Q-switching and cavity dumping of YAIG: Nd lasers. — J. Appl. Phys., 1971, v. 42, N° 3.
22. **Волосов В. Д., Крылов В. Н.** ВРГВГ с выводом двулучепреломляющей призмой. — Оптика и спектроскопия, 1973, т. 35.
23. **Дмитриев В. Г., Зенкин В. А.** Усиление и генерация второй оптической гармоники в активно-нелинейной среде. — Квантовая электроника, 1976, т. 3, № 8.

24. **Дмитриев В. Г., Зенкин В. А., Корниенко Н. Е., Рыжков А. И., Стрижевский В. Л.** Лазеры с активно-нелинейными средами. — Квантовая электроника, 1978, т. 5, № 11.
25. **Карпенко С. Г., Стрижевский В. Л.** Нестационарная внутрирезонаторная генерация второй оптической гармоники в лазерах с активно-нелинейными средами. — Квантовая электроника, 1979, т. 6, № 3.
26. **Каминский А. А.** Лазерные кристаллы. — М.: Наука, 1975.
27. **Евланова Н. Ф., Ковалев А. С., Копцик В. А., Корниенко Л. С., Прохоров А. М., Рашкович Л. Н.** Индуцированное излучение кристаллов $LiNbO_3$ с примесью неодима. — Письма в ЖЭТФ, 1967, т. 5.
28. **Johnson L. F., Ballman A. A.** Coherent emission from rareearth ions in electrooptic crystals. — J. Appl. Phys., 1969, v. 40, n° 1.
29. **Kaminskii A. A., Koptsik V. A., Maskaev Yu. A., Naumova I. I., Rashkovich L. N., Sarkisov S. E.** Stimulated emission from Nd^{+3}-ions in ferroelectric $Ba_2NaNb_5O_{15}$ crystals. — Phys. State Sol., 1975, v. 28, n° 1.
30. **Рез И. С.** О кристаллохимических возможностях создания новых полифункциональных материалов квантовой электроники. — В кн.: Тезисы докладов 8 Всесоюзн. конф. по когерентной и нелинейной оптике. — Тбилиси: Мецниерба, 1976.
31. **Ивлева Л. И., Каминский А. А., Кузьминов Ю. С., Шпаков В. Н.** Поглощение, люминесценция и индуцированное излучение кристаллов $LiNbO_3$ Nd^{+3}. Докл. АН СССР, 1968, т. 183.
32. **Kaminov J. P., Stulz L. W.** Nd : $LiNbO_3$- laser. — IEEE, 1975, v. QE-11, n° 6.
33. **Дмитриев В. Г., Ицхоки И. Я., Швом Е. М.** К теории генерации твердотельного лазера с немгновенным включением добротности резонатора. Электронная техника. Сер. 10. Квантовая электроника, 1975, вып. 1.

CHAPITRE 5

GÉNÉRATION PARAMÉTRIQUE DE LUMIÈRE

§ 5.1. Introduction

Générateurs de lumière cohérente continûment accordables en fréquence. — On peut distinguer trois types de générateurs à accord continu de la fréquence du rayonnement émis. Au premier type nous rattachons les lasers dans lesquels le changement désiré de la fréquence de la transition lasante se produit sous une action extérieure. On peut indiquer à titre d'exemple les lasers à semi-conducteurs dont la fréquence d'oscillation varie sous l'effet d'un champ électrique extérieur ou bien à la suite des variations de la température ou de la composition chimique du milieu actif (v. [1]).

Au deuxième type seront classés les lasers à large raie de la transition lasante. Le changement de fréquence s'effectue dans les limites de cette raie. Pour pouvoir réaliser l'accord en fréquence on place à l'intérieur de la cavité laser un élément sélectif de spectre, par exemple, un prisme dispersif ou un réseau de diffraction. Une telle méthode d'accord en fréquence est employée dans les lasers à colorants [2] et dans ceux à gaz comprimés [3]. A ce propos signalons aussi les lasers accordables à centres colorés dans les cristaux ioniques [4].

Enfin, le troisième type sera constitué par les générateurs paramétriques de la lumière (en abrégé GPL). L'accord de fréquence s'effectue ici sur la base de l'interaction paramétrique des ondes lumineuses dans le cristal non linéaire.

Le principe de fonctionnement du GPL et les schémas possibles de l'accord de fréquence ont été décrits en 1962 dans les travaux de Akhmanov et Khokhlov [5] ainsi que dans les travaux de Kroll [6] et de Kingston [7]. Pour la première fois la génération paramétrique de la lumière a été réalisée en 1965 [8]. La théorie des amplificateurs et des oscillateurs paramétriques a été examinée dans [9] à [18] et dans certains autres ouvrages, par exemple [19] à [21].

De nos jours, le plus grand intérêt est suscité par les lasers accordables à colorants et par les générateurs paramétriques de lumière. Les lasers à colorants sont accordables dans le domaine de 0,3 à 1,2 μm (de longueur d'onde émise) et les GPL, de 0,4 à 22 μm. Les oscilla-

teurs paramétriques à polaritons permettent en principe de réaliser l'accord en fréquence de longueur d'onde de 50 à 1000 μm.

Interaction paramétrique à trois fréquences des ondes lumineuses dans un milieu non linéaire. — Comme nous l'avons vu au § 1.3, la propagation dans un milieu non linéaire quadratique de deux ondes lumineuses

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_1 A_1 \exp\left[i\,(\omega_1 t - \mathbf{k}_1\mathbf{r})\right] + \text{c.c.}$$

et

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_2 A_2 \exp\left[i\,(\omega_2 t - \mathbf{k}_2\mathbf{r})\right] + \text{c.c.}$$

entraîne en particulier l'apparition d'une onde de polarisation

$$\mathbf{P}_q^{(2)} = \frac{1}{2}\,\chi : \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \left\{A_1 A_2^* \exp\left[i\,(\omega_1 - \omega_2)\,t - i\,(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\,\mathbf{r}\right] + \text{c.c.}\right\},$$

qui peut donner lieu à la réémission d'une onde lumineuse de fréquence $\omega_1 - \omega_2$ et de vecteur d'onde $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$. Supposons que trois ondes lumineuses cohérentes se propagent dans un milieu non linéaire:

une *onde de pompage* intense

$$\mathbf{E}_p\,(\mathbf{r},\ t) = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_p \left\{A_p\,(\mathbf{r},\ t) \exp\left[i\,(\omega_p t - \mathbf{k}_p\mathbf{r})\right] + \text{c.c.}\right\} \qquad (5.1.1a)$$

et deux ondes lumineuses faibles:

une *onde de signal*

$$\mathbf{E}_s\,(\mathbf{r},\ t) = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_s \left\{A_s\,(\mathbf{r},\ t) \exp\left[i\,(\omega_s t - \mathbf{k}_s\mathbf{r})\right] + \text{c.c.}\right\} \qquad (5.1.1b)$$

et une *onde vide*

$$\mathbf{E}_v\,(\mathbf{r},\ t) = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_v \left\{A_v\,(\mathbf{r},\ t) \exp\left[i\,(\omega_v t - \mathbf{k}_v\mathbf{r})\right] + \text{c.c.}\right\} \qquad (5.1.1c)$$

(les appellations « onde de signal » et « onde vide » sont dans une certaine mesure arbitraires). L'interaction non linéaire entre l'onde de pompage et l'onde de signal peut faire naître une onde réémise de fréquence $\omega_p - \omega_s$ et de vecteur d'onde $\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s$, alors que l'interaction de l'onde de pompage et de l'onde vide peut donner lieu à la réémission d'une onde de fréquence $\omega_p - \omega_v$ et de vecteur d'onde $\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_v$.

Si les fréquences et les vecteurs d'onde de ces trois ondes satisfont aux conditions

$$\omega_s + \omega_v = \omega_p, \qquad (5.1.2)$$

$$\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_v = \mathbf{k}_p, \qquad (5.1.3)$$

ces interactions non linéaires peuvent conduire à une amplification de l'onde de signal et de l'onde vide par suite du transfert à ces ondes d'une partie d'énergie de l'onde de pompage. L'expression (5.1.3) est

la condition de synchronisme d'onde (de phase). Associée à (5.1.2), elle détermine les conditions d'interaction paramétrique efficace des trois ondes lumineuses considérées (interaction paramétrique à trois fréquences).

Processus paramétriques en radiotechnique et en optique. — Ces processus sont couramment utilisés en radiotechnique. Ils sont dus à la modulation périodique des *paramètres* réactifs (inductance ou capacité) du circuit oscillant; v. par exemple [22]. Aux basses fréquences, la modulation peut s'effectuer mécaniquement, par exemple, au moyen d'une rotation rapide d'une plaquette diélectrique placée dans un condensateur. Dans ce cas on voit bien que le processus paramétrique est en fait un processus *linéaire*; c'est le processus *de modulation*.

Il est utile d'en tenir compte en passant aux fréquences élevées lorsqu'on est amené à utiliser des éléments *non linéaires*, par exemple à remplacer une capacité par une diode semi-conductrice. Il est naturel que l'introduction d'un élément non linéaire dans le circuit oscillant rend non linéaire tout le processus paramétrique. Pourtant sa non-linéarité n'est pas fondamentale n'étant ici qu'un moyen permettant de réaliser une modulation à haute fréquence des paramètres du système.

En passant à l'optique non linéaire, il faut souligner que dans ce cas aussi les processus paramétriques sont en fait des processus de modulation linéaires (il se produit la modulation dans le temps et dans l'espace d'un tel « paramètre » du milieu comme la permittivité).

Fait important, la *réalisation de la modulation* dans le domaine optique exige d'utiliser un *milieu non linéaire*. C'est pourquoi l'interaction paramétrique des ondes lumineuses a un caractère non linéaire et doit donc être examinée dans le cadre de l'optique *non linéaire*.

Citons à ce propos la remarque faite par Akhmanov et Khokhlov dans l'introduction à la monographie [11]. Notant que les effets optiques paramétriques sont « des effets se déroulant dans des milieux dont les paramètres varient d'une façon prédéterminée à l'aide de forces extérieures », ces auteurs indiquent qu'en toute rigueur ces effets ne relèvent pas de l'optique non linéaire parce qu'ils « se manifestent également dans des champs lumineux faibles où leur comportement ne dépend pas de l'intensité de la lumière... En même temps, les effets paramétriques sont déterminés par les mêmes propriétés physiques que les effets optiques dépendant de l'intensité de l'onde lumineuse et se manifestent donc comme une action en retour du milieu sur le champ, il s'ensuit la communauté méthodique de l'étude théorique des problèmes relatifs à l'action d'un champ sur un milieu et d'un milieu à paramètres variables sur un champ qui rend raisonnable l'inclusion de l'optique paramétrique dans l'optique non linéaire considérée en un sens plus large ». En complétant cette pensée, les auteurs de l'introduction indiquent que si les paramètres du milieu sont modulés à l'aide d'une onde lumineuse intense, cette situation se rapporte « dans une même mesure à l'optique paramétrique et à l'optique non linéaire prise au sens étroit ».

L'interaction paramétrique des ondes lumineuses peut être considérée comme un processus de diffusion de la lumière par lumière, se

déroulant dans un milieu non linéaire. C'est ainsi que l'amplification de l'onde de signal peut s'interpréter comme le résultat d'une diffusion partielle de l'onde de pompage par l'onde vide. A ce propos on utilise souvent le terme *diffusion paramétrique de la lumière* (v. par exemple [23]). Les ondes lumineuses se propageant dans un milieu peuvent diffuser également par des ondes de nature différente. Ainsi, l'effet Mandelstam-Brillouin est la diffusion des ondes lumineuses par des ondes acoustiques.

Luminescence, amplification et oscillation paramétriques. — Supposons qu'une onde lumineuse cohérente de forte intensité (onde de pompage) se propage à travers un cristal non linéaire. Un cristal est toujours le siège des fluctuations du champ sous forme de signaux désordonnés extrêmement faibles. Par suite de l'interaction paramétrique de ces signaux avec l'onde de pompage la propagation de l'onde de pompage s'accompagnera d'une réémission des ondes lumineuses à des fréquences inférieures à celle de l'onde de pompage. Ce phénomène est connu sous le nom de *luminescence paramétrique* (diffusion paramétrique de la lumière). A la différence de la luminescence ordinaire, il existe ici un lien entre les fréquences réémises et les angles que les directions de l'observateur font avec la direction de propagation de l'onde de pompage. En outre, dans la luminescence paramétrique les fréquences réémises ne sont aucunement liées aux fréquences des transitions entre niveaux dans le milieu [1]).

Supposons qu'en plus de l'onde de pompage intense on introduit dans un cristal non linéaire deux ondes relativement faibles : une onde de signal et une onde vide [les ondes définies par (5.1.1)]. Nous supposerons également que les fréquences et les vecteurs d'onde de toutes les trois ondes cohérentes que nous considérons satisfont aux conditions (5.1.2) et (5.1.3). Comme il sera montré au § 5.3, il existe un domaine des valeurs de la fréquence ω_s (et donc de la fréquence ω_v) dans lequel on observe une croissance des amplitudes $|A_s|$ et $|A_v|$ au fur et à mesure de la propagation des ondes dans le cristal. Ce phénomène est appelé *amplification paramétrique*. Si les inégalités

$$|A_s(z)| \ll |A_p(0)|\,; \quad |A_v(z)| \ll |A_p(0)| \qquad (5.1.4)$$

sont vérifiées, l'amplitude $|A_p|$ peut être considérée de façon approchée comme étant constante sur toute la longueur du cristal. On dit dans ce cas que l'on adopte une *approximation du champ de pompage constant*. Si c'est nécessaire, on tient compte de l'affaiblissement de l'onde de pompage par les ondes croissantes de fréquences ω_s et ω_v qui se manifeste par une diminution de l'amplitude

[1]) Nous ne considérons pas ici les processus paramétriques à la résonance (lorsque la fréquence de l'une des ondes est voisine de la fréquence propre de la substance). Pour une étude de ces processus voir [24] à [26].

$|A_p|$ à mesure que les ondes se propagent dans le cristal et on dit alors que le régime d'amplification paramétrique est *non linéaire.*

Plaçons un cristal non linéaire à l'intérieur de la cavité résonnante optique en orientant cette dernière de telle sorte que son axe soit confondu avec la direction de synchronisme pour les ondes (5.1.1) (par raison de simplification nous considérons dans ce cas le synchronisme scalaire lorsque tous les vecteurs d'onde sont colinéaires). Effectuons le pompage du cristal par une onde suffisamment intense (5.1.1a). Dans des conditions bien déterminées, la cavité commence à émettre les ondes (5.1.1b) et (5.1.1c), c'est la *génération paramétrique.* Généralement, pour l'excitation de l'oscillation on n'introduit dans le cristal que la seule onde de pompage. Dans ce cas l'oscillation démarre sur le bruit par suite de la luminescence paramétrique. Mais il est également possible d'initier l'oscillation paramétrique au moyen d'un signal cohérent auxiliaire introduit à cet effet dans le cristal.

Si la cavité possède une haute surtension aux fréquences ω_s et ω_v. on dit que l'on a un générateur paramétrique de lumière *à deux cavités* (GPLDC). Si, par contre, la cavité n'est à haute surtension qu'à une seule de deux fréquences, par exemple à la fréquence ω_s, alors que pour l'autre fréquence elle est en fait inopérante, on dit que le générateur paramétrique de lumière est *à une seule cavité* (GPLSC).

A noter que c'est précisément la cavité qui permet chaque fois de *sélectionner* les fréquences concrètes ω_s et ω_v en lesquelles « se divise » la fréquence ω_p de l'onde de pompage. Le nombre de paires d'ondes dont la somme des fréquences est égale à ω_p peut être évidemment aussi grand que l'on veut. Pourtant la paire d'ondes produites chaque fois est celle pour laquelle la direction de synchronisme se confond avec l'axe de la cavité (en examinant le synchronisme, il convient certes de prendre en considération toutes les trois ondes, c'est-à-dire de tenir compte également de l'onde de pompage).

En soulignant la circonstance de principe liée à la spécificité des phénomènes optiques paramétriques, Akhmanov et Khokhlov écrivaient [19]: « En optique, l'interaction paramétrique a un caractère ondulatoire. De ce fait, elle est essentiellement déterminée non seulement par des relations temporelles (fréquentielles) mais également par des relations spatiales: pour l'auto-excitation des oscillations paramétriques dans le domaine optique il est nécessaire qu'on assure non seulement un accord de « fréquence » mais encore la réalisation d'une relation bien déterminée entre les vecteurs d'onde (accord « d'onde »), ce qui impose des exigences assez sévères aux propriétés de dispersion du milieu. » Observons à ce propos que dans le générateur paramétrique de la lumière c'est précisément la cavité optique qui effectue les deux accords: de fréquence et d'onde.

Procédés d'accord en fréquence du GPL. — Comme nous l'avons vu plus haut, le GPL ne produit que les ondes (fréquences) la direction de synchronisme desquelles est confondue avec l'axe de la cavité résonnante. Il est clair qu'en agissant d'une manière ou d'une autre

sur l'indicatrice optique du cristal (autrement dit, en modifiant les propriétés dispersives du cristal), on peut faire varier continûment la fréquence des ondes produites.

On peut par exemple tourner progressivement le cristal à l'intérieur de la cavité en faisant varier ainsi l'angle que l'axe optique du cristal fait avec la direction du faisceau de pompage (direction de l'axe de la cavité). Si pour une orientation du cristal la cavité assure la direction de synchronisme pour les ondes de fréquences ω_p, ω_s, ω_v ($\omega_p = \omega_s + \omega_v$), pour une autre orientation, la direction de synchronisme sera offerte à une autre combinaison de fréquences: ω_p, ω_s', ω_v' ($\omega_p = \omega_s' + \omega_v'$). Le changement de fréquence au moyen de la rotation du cristal par rapport au faisceau de pompage est appelé accord *angulaire*.

Pour changer la fréquence, on peut également faire varier la température du cristal non linéaire (accord *par variation de température*). Ceci est lié à ce que la variation de température provoque une certaine modification de la surface des vecteurs d'onde; l'angle de synchronisme dépend de la température. On peut également utiliser la variation de l'indicatrice optique du cristal sous l'effet d'un champ électrique extérieur (accord *électro-optique*). Enfin, on peut changer la longueur d'onde émise par le GPL en faisant varier la fréquence de l'onde de pompage.

Ainsi, en employant des cristaux non linéaires différents et des fréquences de pompage différentes, en modifiant l'orientation du cristal par rapport au faisceau de pompage, en utilisant la variation de l'indicatrice optique du cristal en fonction de la température et d'un champ électrique extérieur, on peut réaliser des générateurs paramétriques de lumière continûment accordables dans un vaste domaine de fréquences optiques.

§ 5.2. Synchronisme de phase dans le cas de l'interaction paramétrique à trois fréquences. Caractéristiques d'accord en fréquence

Pour obtenir l'interaction paramétrique efficace de trois ondes lumineuses dans un milieu non linéaire quadratique il est nécessaire de réaliser, en plus de la relation de fréquences (5.1.2), encore les conditions de synchronisme de phase (5.1.3). Ainsi

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 ; \qquad (5.2.1a)$$

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 . \qquad (5.2.1b)$$

Les relations (5.2.1) peuvent être vérifiées dans des cristaux optiquement anisotropes lors de l'interaction des ondes de polarisations différentes.

Types de synchronisme de phase dans les cristaux uniaxiaux négatifs. — Nous allons considérer des cristaux uniaxiaux négatifs. Rappelons que pour de tels cristaux $n_o > n_e$, où n_o et n_e sont respectivement les valeurs principales de l'indice de réfraction pour les ondes ordinaire et extraordinaire. Dans les cristaux que nous considérons peuvent avoir lieu trois types de synchronisme pour l'interaction paramétrique à trois fréquences:

le synchronisme *ooe*

$$\mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^o = \mathbf{k}_3^e ; \qquad (5.2.2)$$

le synchronisme *oee*

$$\mathbf{k}_1^o + \mathbf{k}_2^e = \mathbf{k}_3^e ; \qquad (5.2.3)$$

le synchronisme *eoe*

$$\mathbf{k}_1^e + \mathbf{k}_2^o = \mathbf{k}_3^e . \qquad (5.2.4)$$

Dans tous les trois cas l'onde de pompage est une onde extraordinaire. De ce fait, le vecteur **E** de l'onde de pompage doit se situer dans un plan passant par le vecteur d'onde et par l'axe optique du cristal. Dans le synchronisme *ooe*, l'onde de signal et l'onde vide sont ordinaires, alors dans le cas des synchronismes *oee* et *eoe* l'une de ces ondes est ordinaire et l'autre extraordinaire.

Chacun des types de synchronisme indiqués ci-dessus peut être *scalaire* ou *vectoriel*. Dans le synchronisme scalaire tous les trois vecteurs d'onde sont colinéaires, alors que dans le cas du synchronisme vectoriel ils ne le sont pas. Ceci explique les termes de synchronisme *colinéaire* et de synchronisme *non colinéaire* qu'on utilise parfois.

Si $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$, on dit qu'il y a *régime dégénéré* d'interaction paramétrique. Dans ce cas les synchronismes *oee* et *eoe* sont indiscernables. Si $\omega_1 \neq \omega_2$ (*régime non dégénéré*), ces types de synchronisme se distinguent (v. plus loin).

Synchronisme du type *ooe*. — Pour fixer les idées nous supposons ici et par la suite que $\omega_1 < \omega_2$. Le synchronisme *ooe* scalaire est illustré par la fig. 5.1, *a* (comparer avec la fig. 2.3, *a*) qui montre les sections des surfaces des vecteurs d'onde $\mathbf{k}_1^o$, $\mathbf{k}_2^o$, $\mathbf{k}_3^e$ par un plan passant par l'axe optique z' du cristal. Dans cette figure, OA représente la direction de synchronisme, θ_s, l'angle de synchronisme *ooe* scalaire, $k_{o1} = n_{o1}\omega_1/c$, $k_{o2} = n_{o2}\omega_2/c$; $k_{o3} = n_{o3}\omega_3/c$, $k_{e3} = n_{e3}\omega_3/c$, où $n_{o1} = n_o(\omega_1)$, $n_{o2} = n_o(\omega_2)$, $n_{o3} = n_o(\omega_3)$, $n_{e3} = n_e(\omega_3)$.

Le synchronisme *ooe* vectoriel est illustré par la fig. 5.1, *b* (comparer avec la fig. 2.5, *a*) dans laquelle θ_1, θ_2, θ_3 sont les angles que l'axe optique du cristal fait avec les vecteurs d'onde $\mathbf{k}_1^o$, $\mathbf{k}_2^o$, et $\mathbf{k}_3^e$ respectivement. Les autres notations sont identiques à celles de la fig. 5.1, *a*.

Introduisons les désignations suivantes:

$$\omega_1/\omega_3 = \gamma ; \quad \theta_1 - \theta_2 = \varphi_1 ; \quad \theta_3 - \theta_2 = \varphi_2 . \qquad (5.2.5)$$

En utilisant le théorème des cosinus, représentons la relation (5.2.2) pour les vecteurs d'onde non colinéaires sous la forme du système suivant de deux équations [compte tenu de (5.2.1a)] [1]:

$$\begin{aligned}(\gamma n_{o1})^2 &= [(1-\gamma)\, n_{o2}]^2 + (n_3^e)^2 - 2\,(1-\gamma)\, n_{o2} n_3^e \cos\varphi_2\,;\\ [(1-\gamma)\, n_{o2}]^2 &= (\gamma n_{o1})^2 + (n_3^e)^2 - 2\gamma n_{o1} n_3^e \cos\varphi_1.\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

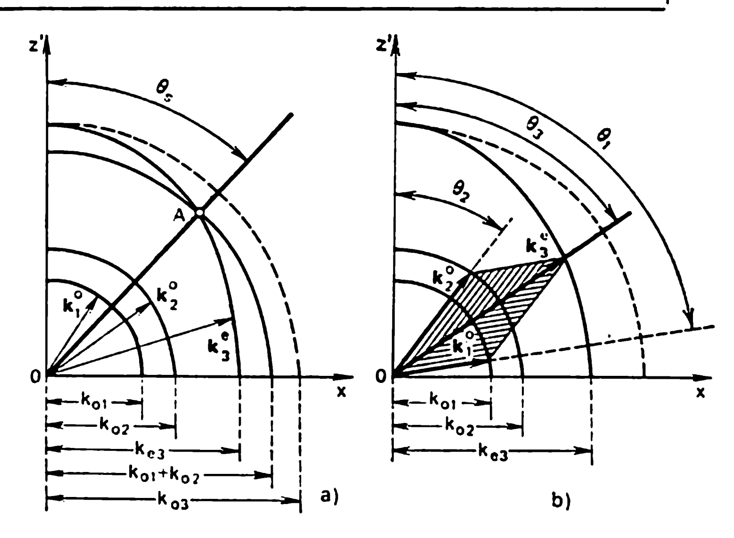


Fig. 5.1

La dépendance de n_3^e vis-à-vis de l'angle θ_3 s'exprime par la relation

$$n_3^e = n_{e3}/\sqrt{1-\varepsilon_3^2\cos^2\theta_3}, \tag{5.2.7}$$

où ε_3 est l'excentricité de l'ellipse $n_3^e(\theta)$:

$$\varepsilon_3 = \sqrt{1-(n_{e3}/n_{o3})^2}. \tag{5.2.8}$$

Pour les vecteurs d'onde colinéaires (synchronisme *ooe* scalaire), $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ et selon (5.2.6) et (5.2.7) on obtient

$$\theta_s = \theta_3 = \arccos = \left[\frac{1}{\varepsilon_3}\sqrt{1-n_{e3}^2/[\gamma n_{o1}+(1-\gamma)\, n_{o2}]^2}\right]. \tag{5.2.9}$$

---

[1]) On ne doit pas confondre n_3^e avec n_{e3}; la première notation désigne la valeur absolue du vecteur $\mathbf{k}_3^e$ divisée par ω_3/c (n_3^e dépend de l'angle que le vecteur $\mathbf{k}_3^e$ forme avec l'axe optique du cristal), alors que la seconde notation est une des valeurs principales de l'indice de réfraction à la fréquence ω_3. Une situation analogue s'est déjà rencontrée au § 2.1.

Pour les vecteurs d'onde non colinéaires (synchronisme *ooe* vectoriel) les relations (5.2.6) et (5.2.7) donnent

$$\cos\varphi_1 = \frac{\gamma n_{o1} - (1-\gamma)\, n_{o2} + n_{e3}^2/(1-\varepsilon_3^2\cos^2\theta_3)}{2\gamma n_{o1} n_{e3}/\sqrt{1-\varepsilon_3^2\cos^2\theta_3}}\ ; \qquad (5.2.10a)$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{(1-\gamma)\, n_{o2} - \gamma n_{o1} + n_{e3}^2/(1-\varepsilon_3^2\cos^2\theta_3)}{2\,(1-\gamma)\, n_{o2} n_{e3}\sqrt{1-\varepsilon_3^2\cos^2\theta_3}}\ . \qquad (5.2.10b)$$

Ces expressions déterminent pour des valeurs données de γ, ω_3, θ_3 les directions suivant lesquelles la condition de synchronisme (5.2.2) est satisfaite

Luminescence paramétrique dans le cas du synchronisme *ooe* vectoriel. — Supposons qu'une onde de pompage extraordinaire de fréquence ω_3 se propage dans un cristal sous un angle θ_3 par rapport

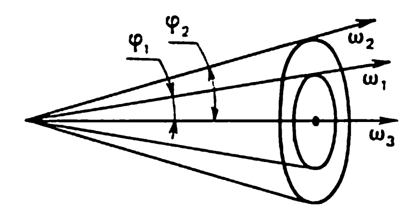


Fig. 5.2

à son axe optique. Les fluctuations de champ de fréquences ω_1 et ω_2 correspondant aux ondes ordinaires, qui sont amplifiées par suite de l'interaction paramétrique, se propageront suivant les directions de synchronisme définies par les relations (5.2.10). Dans toutes les autres directions l'amplification des ondes de fluctuations sera nulle pour des valeurs données des paramètres γ, ω_3, θ_3. Ainsi, le rayonnement de bruit amplifié (luminescence paramétrique) aux fréquences ω_1 et ω_2 se propage suivant les génératrices de deux cônes circulaires dont les axes sont confondus avec le vecteur $\mathbf{k}_3^e$, et les angles d'ouverture sont égaux à φ_1 (pour la fréquence ω_1) et à φ_2 (pour la fréquence ω_2) (v. fig. 5.2). Une variation du paramètre γ (le passage à d'autres valeurs des fréquences ω_1 et ω_2) produit une variation des angles φ_1 et φ_2. Au régime dégénéré ($\gamma = 1/2$; $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$), $\varphi_1 = \varphi_2$; dans ce cas les deux cônes se confondent. Dans l'interaction colinéaire (synchronisme *ooe* scalaire), les cônes sont confondus avec le faisceau de pompage.

Synchronisme du type *oee* ou *eoe*. — Le synchronisme *oee* scalaire est illustré à la fig. 5.3, *a*, et le synchronisme *eoe* scalaire à la fig. 5.3, *b*

(nous considérons le cas où $\omega_1 < \omega_2$). Dans ces figures

$$k_{o1} = n_{o1}\omega_1/c, \quad k_{e1} = n_{e1}\omega_1/c,$$
$$k_{o2} = n_{o2}\omega_2/c, \quad k_{e2} = n_{e2}\omega_2/c,$$
$$k_{o3} = n_{o3}\omega_3/c, \quad k_{e3} = n_{e3}\omega_3/c,$$

$\mathbf{k}'$ est un vecteur dont la valeur est égale dans toute direction à la somme des valeurs des vecteurs $\mathbf{k}_1^o$ et $\mathbf{k}_2^o$, et $\mathbf{k}''$, un vecteur dont la valeur est égale dans toute direction à la somme des valeurs des

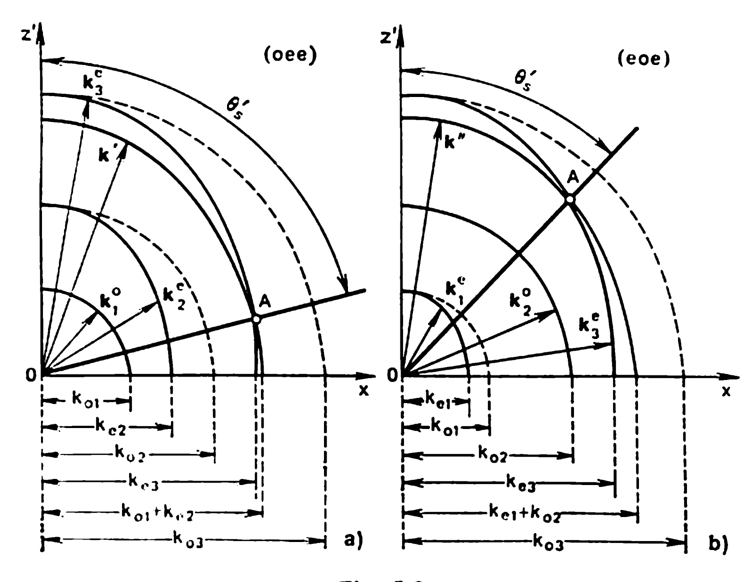


Fig. 5.3

vecteurs $\mathbf{k}_1^e$ et $\mathbf{k}_2^o$. Sur cette figure on voit bien la différence entre les synchronismes des types *oee* et *eoe* (pour $\omega_1 \neq \omega_2$). Elle se traduit par des angles de synchronisme θ_s' différents. En particulier, les fréquences ω_1 et ω_2 peuvent avoir des valeurs telles que pour une fréquence de pompage ω_3 donnée le synchronisme *eoe* se réalise dans un cristal donné, alors que le synchronisme *oee* ne se réalise pas. En principe, une telle situation peut se présenter pour $\omega_1 < \omega_2$. Si $\omega_1 > \omega_2$ il peut se trouver au contraire que le synchronisme *oee* se réalise et le synchronisme *eoe* ne se réalise pas.

La fig. 5.4 illustre le synchronisme *oee* vectoriel. Ici, θ_1, θ_2, θ_3 sont les angles que l'axe optique du cristal forme avec les vecteurs d'onde $\mathbf{k}_1^o$, $\mathbf{k}_2^o$ et $\mathbf{k}_3^e$.

En faisant usage du théorème des cosinus, représentons la relation (5.2.3) pour les vecteurs non colinéaires par le système d'équa-

17—0676

tions [compte tenu de (5.2.1a) et (5.2.5)]

$$\boxed{\begin{aligned}&(\gamma n_{o1})^2=[(1-\gamma)\,n_2^e]^2+(n_3^e)^2-2\,(1-\gamma)\,n_2^e n_3^e\cos\varphi_2\,;\\&[(1-\gamma)\,n_2^e]^2=(\gamma n_{o1})^2+(n_3^e)^2-2\gamma n_{o1}n_3^e\cos\varphi_1\end{aligned}}\qquad(5.2.11)$$

où

$$n_2^e=n_{e2}/\sqrt{1-\varepsilon_2^2\cos^2\theta_2}\,;\quad n_3^e=n_{e3}/\sqrt{1-\varepsilon_3^2\cos^2\theta_3}\,;\qquad(5.2.12)$$

$$\varepsilon_2=\sqrt{1-(n_{e2}/n_{o2})^2}\,;\quad \varepsilon_3=\sqrt{1-(n_{e3}/n_{o3})^2}.\qquad(5.2.13)$$

Les angles de synchronisme ne peuvent être déterminés à partir de ces relations que par un calcul sur ordinateur.

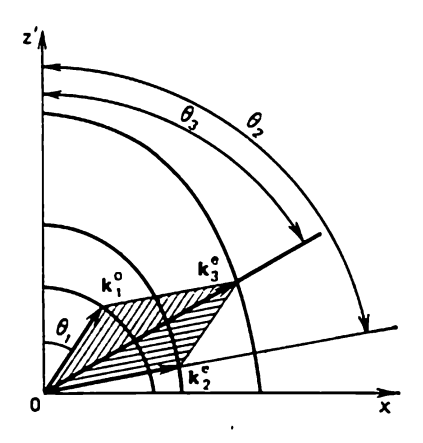


Fig. 5.4

Dans le cas du synchronisme scalaire ($\varphi_1=\varphi_2=0$) l'angle de synchronisme peut se déterminer à l'aide de la formule approchée suivante (à 2 mn d'angle près) [21]:

$$\theta_s'\approx\arccos\sqrt{\frac{2}{3}A\,(\sqrt{1+B}-1)},\qquad(5.2.14)$$

où on a pour l'interaction *oee*

$$A=\frac{n_{e3}\varepsilon_3^2-(1-\gamma)\,n_{e2}\varepsilon_2^2}{n_{e3}\varepsilon_3^4-(1-\gamma)\,n_{e2}\varepsilon_2^4}\,;\qquad(5.2.15a)$$

$$B=\frac{[\gamma n_{o1}+(1-\gamma)\,n_{e2}-n_{e3}]\,[n_{e3}\varepsilon_3^4-(1-\gamma)\,n_{e2}\varepsilon_2^4]}{[n_{e3}\varepsilon_3^2-(1-\gamma)\,n_{e2}\varepsilon_2^2]^2}\,.\qquad(5.2.15b)$$

Pour passer à l'interaction *eoe*, il faut remplacer dans (5.2.15) γ par $(1-\gamma)$ et, en outre, utiliser l'indice 2 au lieu de 1 et l'indice 1 au lieu de 2.

Caractéristiques d'accord en fréquence. — Ces caractéristiques du générateur paramétrique de lumière traduisent la variation de l'an-

gle de synchronisme en fonction du paramètre γ. En l'absence de miroirs dans la cavité résonnante du générateur elles illustrent les propriétés spectro-angulaires de la luminescence paramétrique.

Désignons par θ^{ooe}, θ^{oee}, θ^{eoe} les angles de synchronisme pour les types correspondants de synchronisme scalaire. Les caractéristiques d'accord en fréquence obéissent aux relations suivantes [12]:

$$\theta^{oee}(\gamma = 1/2) = \theta^{eoe}(1/2) > \theta^{ooe}(1/2); \qquad (5.2.16)$$

$$\theta^{oee}(\gamma) \geqslant \theta^{oee}(1/2) \geqslant \theta^{eoe}(\gamma); \qquad (5.2.17)$$

$$(d\gamma/d\theta)^{ooe} \gg (d\gamma/d\theta)^{eoe} > (d\gamma/d\theta)^{oee}. \qquad (5.2.18)$$

C'est l'interaction *ooe* au régime dégénéré (pour $\gamma = 1/2$) qui se caractérise par la plus grande pente: pour $\gamma = 1/2$ la dérivée $(d\gamma/d\theta)^{ooe}$ tend vers l'infini. (Exception faite pour le cas où $\theta^{ooe}(1/2) = \pi/2$.)

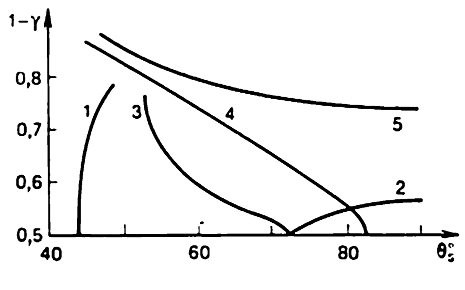


Fig. 5.5

Les interactions *oee* et *eoe* se caractérisent par un accord plus continu, ce qui est très important pour les générateurs paramétriques de lumière.

Le changement de fréquence ω_1 et ω_2 (variation du paramètre γ) dans le sens déterminé par $\mathbf{k}_3$ peut s'obtenir, lorsque la valeur de ω_3 est donnée, par l'un des procédés indiqués plus haut: en faisant tourner le cristal par rapport au faisceau de pompage, en faisant varier la température du cristal ou l'intensité du champ électrique extérieur ou encore la fréquence de l'onde de pompage.

La fig. 5.5 représente les caractéristiques d'accord en fréquence dans le cas de l'interaction colinéaire obtenues pour un cristal de $LiNbO_3$ pour différents types de synchronisme et différentes longueurs d'onde de pompage: *1*: *ooe*, $\lambda_3 = 1{,}06$ µm; *2*: *oee*, $\lambda_3 = 1{,}06$ µm; *3*: *eoe*, $\lambda_3 = 1{,}06$ µm; *4*: *ooe*, $\lambda_3 = 0{,}53$ µm; *5*: *eoe*, $\lambda_3 = 0{,}53$ µm [12]. Les caractéristiques se rapportent au cas de l'accord en fréquence par rotation du cristal (accord angulaire).

La fig. 5.6 montre une caractéristique d'accord en fréquence par variation de température obtenue pour un cristal de $Ba_2NaNb_5O_{15}$ dans le cas du synchronisme à 90°, la longueur d'onde de pompage étant $\lambda_3 = 0{,}488$ µm. Cette caractéristique est une courbe de varia-

tion des longueurs d'onde λ_1 et λ_2 (correspondant respectivement aux fréquences ω_1 et ω_2) en fonction de la température du cristal. Comme il est visible sur cette figure, le régime dégénéré ($\lambda_1 = \lambda_2$) est réalisé à une température de —45 °C.

La fig. 5.7 représente les caractéristiques d'accord en fréquence construites, pour un cristal de $LiNbO_3$, sous forme de courbes de

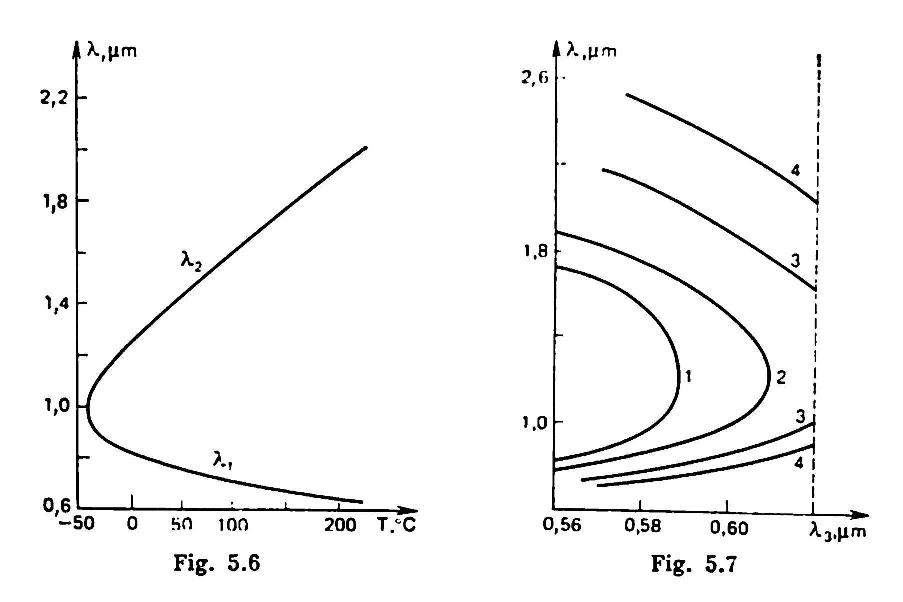


Fig. 5.6

Fig. 5.7

variation de λ_1 et λ_2 en fonction de λ_3 (accord par variation de la longueur d'onde de pompage). Ces courbes sont obtenues dans le cas du synchronisme à 90° pour différentes températures du cristal : 225 °C (courbe *1*), 275 °C (courbe *2*), 325 °C (courbe *3*), 375 °C (courbe *4*).

C'est l'accord en fréquence par variation de température du cristal qui présente le plus grand intérêt pratique. L'accord électro-optique (par variation d'intensité de champ électrique) est peu efficace et n'est utilisé que dans le cas de la modulation à haute fréquence du rayonnement émis par le GPL. L'accord par variation de longueur d'onde de pompage est possible lorsque le laser de pompage est lui-même accordable en fréquence.

§ 5.3. Amplification paramétrique

Equations tronquées pour l'interaction paramétrique à trois fréquences à l'approximation des ondes planes. — Pour établir les équations tronquées de la génération de deuxième harmonique nous

avons introduit dans (2.2.1) l'expression (2.2.2) (v. § 2.2). Maintenant au lieu de (2.2.2) nous utilisons l'expression suivante

$$\mathbf{E}(z,\ t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\mathbf{e}_n A_n(z)\exp\left[i(\omega_n t-k_n z)\right]+\text{c.c.}, \qquad (5.3.1)$$

qui décrit la superposition de trois ondes lumineuses: de l'onde de pompage ($n = 3$), de l'onde de signal ($n = 1$) et de l'onde vide ($n = 2$). En introduisant (5.3.1) dans (2.2.1) et en répétant les opérations effectuées au § 2.2, on obtient le système suivant d'équations tronquées pour les amplitudes réelles $a_n(z) = |A_n(z)|$ et pour la phase généralisée $\Psi(z)$ [cf. le système (2.2.31)]:

$$\boxed{\begin{aligned}
&da_1/dz+\delta_1 a_1-\sigma_1 a_2 a_3\sin\Psi=0;\\
&da_2/dz+\delta_2 a_2-\sigma_2 a_1 a_3\sin\Psi=0;\\
&da_3/dz+\delta_3 a_3+\sigma_3 a_1 a_2\sin\Psi=0;\\
&d\Psi/dz-\Delta k+\left(\sigma_1\frac{a_2a_3}{a_1}+\sigma_2\frac{a_1a_3}{a_2}-\sigma_3\frac{a_1a_2}{a_3}\right)\cos\Psi=0.
\end{aligned}} \qquad (5.3.2)$$

La phase généralisée est déterminée par la relation

$$\Psi=\varphi_3-\varphi_1-\varphi_2-\Delta kz, \qquad (5.3.3)$$

où Δk est la projection du vecteur $\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ sur l'axe des z et φ_n sont des phases déterminées par la relation $A_n = a_n \exp(i\varphi_n)$.

Les coefficients d'absorption linéaire δ_n et les coefficients de couplage non linéaire σ_n qui entrent dans (5.3.2) se décrivent par des expressions analogues à (2.2.29) et (2.2.30):

$$\delta_n=\omega_n\mathbf{e}_n(\operatorname{Im}\varepsilon(\omega_n):\ \mathbf{e}_n)/2n(\omega_n)c; \qquad (5.3.4)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1&=2\pi\omega_1\mathbf{e}_1(\chi(\omega_1):\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)/n(\omega_1)c\equiv4\pi\omega_1D_1/n(\omega_1)c;\\
\sigma_2&=2\pi\omega_2\mathbf{e}_2(\chi(\omega_2):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3)/n(\omega_2)c\equiv4\pi\omega_2D_2/n(\omega_2)c;\\
\sigma_3&=2\pi\omega_3\mathbf{e}_3(\chi(\omega_3):\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)/n(\omega_3)c\equiv4\pi\omega_3D_3/n(\omega_3)c.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.5)$$

[En comparant ces expressions à (2.2.29) et (2.2.30), on ne devra pas oublier que $k_n = \omega_n n(\omega_n)/c$.]

De la condition de synchronisme ($k_3 = k_1 + k_2$) il résulte que les coefficients de couplage non linéaire vérifient la relation approchée (à la dispersion de l'indice de réfraction près) suivante:

$$\sigma_3\approx\sigma_1+\sigma_2. \qquad (5.3.6)$$

Notons qu'en l'absence de désaccord ($\Delta k = 0$) et de dispersion de l'absorption ($\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \equiv \delta$) les équations tenant compte de l'absorption peuvent être ramenées, de même que dans le cas de la génération de deuxième harmonique (v. § 2.3), aux équations sans

absorption si l'on introduit à cet effet de nouvelles variables:

$$u_n = a_n \exp(\delta z); \quad \xi = [1 - \exp(-\delta z)]/\delta. \tag{5.3.7}$$

Intégrales du système d'équations tronquées; relations intégrales de Manley-Rowe. — Les équations tronquées sans absorption comportent les intégrales suivantes:

$$\sigma_1\sigma_2 a_1^2 + \sigma_1\sigma_3 a_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2 a_3^2 = \text{const}; \tag{5.3.8a}$$

$$\sigma_2 a_1^2 - \sigma_1 a_2^2 = \text{const}; \tag{5.3.8b}$$

$$\sigma_3 a_2^2 + \sigma_2 a_3^2 = \text{const}. \tag{5.3.8c}$$

De (5.3.8b) on tire

$$\sigma_2 [a_1^2(z) - a_1^2(0)] = \sigma_2 [a_2^2(z) - a_2^2(0)], \tag{5.3.9}$$

et de (5.3.8c):

$$\sigma_3 [a_2^2(z) - a_2^2(0)] = -\sigma_2 [a_3^2(z) - a_3^2(0)]. \tag{5.3.10}$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{aligned} &[a_1^2(z) - a_1^2(0)]/[a_2^2(z) - a_2^2(0)] = \sigma_1/\sigma_2 \approx \omega_1/\omega_2; \\ &[a_2^2(z) - a_2^2(0)]/[a_3^2(z) - a_3^2(0)] = -\sigma_2/\sigma_3 \approx -\omega_2/\omega_3; \\ &[a_1^2(z) - a_1^2(0)]/[a_3^2(z) - a_3^2(0)] = -\sigma_1/\sigma_3 \approx -\omega_1/\omega_3. \end{aligned}} \tag{5.3.11}$$

Les relations (5.3.11) sont connues sous le nom de *relations intégrales de Manley-Rowe.* Les accroissements de la densité de puissance des ondes interagissantes sur un certain trajet parcouru dans le cristal non linéaire sont entre eux dans le même rapport que les fréquences correspondantes.

Equations tronquées à l'approximation du champ de pompage constant. — En supposant que

$$a_1(z) \ll a_3(0); \; a_2(z) \ll a_3(0), \tag{5.3.12}$$

négligeons le terme $\sigma_3 a_1 a_2 \sin\Psi$ dans la troisième équation et le terme $\sigma_3 a_1 a_2 \cos\Psi/a_3$ dans la quatrième équation du système (5.3.2). En outre, posons $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta$. En définitive, le système (5.3.2) prend la forme

$$\boxed{\begin{aligned} &da_1/dz + \delta a_1 - \sigma_1 a_2 a_3 \sin\Psi = 0; \\ &da_2/dz + \delta a_2 - \sigma_2 a_1 a_3 \sin\Psi = 0; \\ &da_3/dz + \delta a_3 = 0; \\ &\frac{d\Psi}{dz} - \Delta k + \left(\sigma_1 \frac{a_2}{a_1} + \sigma_2 \frac{a_1}{a_2}\right) a_3 \cos\Psi = 0. \end{aligned}} \tag{5.3.13}$$

De la troisième équation du système (5.3.13) on tire

$$a_3(z) = a_{30} \exp(-\delta z), \qquad (5.3.14)$$

où $a_{30} = a_3(0)$. Ce résultat signifie que dans le cadre de l'approximation du champ de pompage constant l'amplitude de l'onde de pompage ne décroît en fait au cours du trajet que par suite de l'absorption (la diminution de l'amplitude a_3 par suite du transfert d'énergie aux ondes de fréquences ω_1 et ω_2 est dans ce cas négligée). En tenant compte de (5.3.14), écrivons le système d'équations tronquées à l'approximation du champ de pompage constant sous la forme suivante:

$$\boxed{\begin{aligned} &da_1/dz + \delta a_1 - \sigma_1 a_2 a_{30} \exp(-\delta z) \sin \Psi = 0; \\ &da_2/dz + \delta a_2 - \sigma_2 a_1 a_{30} \exp(-\delta z) \sin \Psi = 0; \\ &\frac{d\Psi}{dz} - \Delta k + \left(\sigma_1 \frac{a_2}{a_1} + \sigma_2 \frac{a_1}{a_2}\right) a_{30} \exp(-\delta z) \cos \Psi = 0. \end{aligned}} \qquad (5.3.15)$$

Résolution des équations tronquées à l'approximation du champ de pompage constant en l'absence de désaccord d'onde. — Supposons la condition de synchronisme exactement satisfaite ($\Delta k = 0$) et passons aux variables u_n et ξ [v. (5.3.7)]. Dans ces conditions, le système (5.3.15) prend la forme

$$\left.\begin{aligned} &du_1/d\xi - \sigma_1 u_2 a_{30} \sin \Psi = 0; \\ &du_2/d\xi - \sigma_2 u_1 a_{30} \sin \Psi = 0; \\ &d\Psi/d\xi + (\sigma_1 u_2/u_1 + \sigma_2 u_1/u_2)\, a_{30} \cos \Psi = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.16)$$

En divisant la troisième équation du système (5.3.16) par la première et vu que $d\Psi = -d\cos\Psi/\sin\Psi$, on obtient

$$\frac{d}{du_1} \cos \Psi = \left(1 + \frac{\sigma_2 u_1^2}{\sigma_1 u_2^2}\right) \frac{\cos \Psi}{u_1}. \qquad (5.3.17)$$

Une des solutions de cette équation pour la phase Ψ est la suivante:

$$\cos \Psi \equiv 0; \quad \Psi \equiv \pi/2. \qquad (5.3.18)$$

La phase $\Psi = \pi/2$ est optimale pour l'amplification paramétrique des ondes.

En tenant compte de (5.3.18), transformons (5.3.16)

$$\left.\begin{aligned} &du_1/d\xi - \sigma_1 u_2 a_{30} = 0; \\ &du_2/d\xi - \sigma_2 u_1 a_{30} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.19)$$

Cherchons la solution du système (5.3.19) sous la forme

$$u_n = C_n \exp(-q\xi); \quad n = 1, 2. \qquad (5.3.20)$$

Reportant (5.3.20) dans (5.3.19), on trouve

$$\left.\begin{aligned} -qC_1 - \sigma_1 a_{30} C_2 = 0; \\ -qC_2 - \sigma_2 a_{30} C_1 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.21)$$

En annulant le déterminant de ce système, on obtient $q = \pm a_{30}\sqrt{\sigma_1\sigma_2}$. Ainsi, la solution générale du système d'équations (5.3.19) peut s'écrire sous la forme

$$u_1 = D_1 \exp(a_{30}\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\xi) + D_2 \exp(-a_{30}\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\xi); \qquad (5.3.22a)$$

$$u_2 = B_1 \exp(a_{30}\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\xi) + B_3 \exp(-a_{30}\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\xi). \qquad (5.3.22b)$$

En utilisant ensuite les conditions aux limites

$$\left.\begin{aligned} u_1(0) = a_{10};\ u_2(0) = a_{20}; \\ (du_1/d\xi)_{\xi=0} = \sigma_1 a_{20} a_{30};\ (du_2/d\xi)_{\xi=0} = \sigma_2 a_{10} a_{30}, \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.23)$$

on détermine les coefficients B_1, B_2, D_1, D_2. On a finalement

$$u_1(\xi) = a_{10}\,\mathrm{ch}(\Gamma_0\xi) + a_{20}\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\,\mathrm{sh}(\Gamma_0\xi); \qquad (5.3.24a)$$

$$u_2(\xi) = a_{20}\,\mathrm{ch}(\Gamma_0\xi) + a_{10}\sqrt{\sigma_2/\sigma_1}\,\mathrm{sh}(\Gamma_0\xi), \qquad (5.3.24b)$$

où $\Gamma_0 = a_{30}\sqrt{\sigma_1\sigma_2}$.

Supposons qu'en plus de l'onde de pompage l'entrée du cristal non linéaire est attaquée par la seule onde de signal ($a_{20} = 0$). En recourant de nouveau aux variables a_n, z au lieu de u_n, ξ, on tire de (5.3.24)

$$a_1(z) = a_{10}\exp(-\delta z)\,\mathrm{ch}\{a_{30}\sqrt{\sigma_1\sigma_2}[1-\exp(-\delta z)]/\delta\}; \qquad (5.3.25a)$$

$$a_2(z) = \sqrt{\sigma_2/\sigma_1}\,a_{10}\exp(-\delta z)\,\mathrm{sh}\{a_{30}\sqrt{\sigma_1\sigma_2}[1-\exp(-\delta z)/\delta\}. \qquad (5.3.25b)$$

En faisant usage de (5.3.19) et en tenant compte que

$$\frac{du_n}{d\xi} = \frac{d}{dz}(a_n e^{\delta z})\frac{dz}{d\xi} = \left(\frac{da_n}{dz} + \delta a_n e^{\delta z}\right)e^{\delta z},$$

on trouve les expressions suivantes pour les dérivées da_1/dz et da_2/dz à l'entrée du cristal:

$$(da_1/dz)_{z=0} = -\delta a_{10} < 0; \qquad (5.3.26a)$$

$$(da_2/dz)_{z=0} = \sigma_2 a_{10} a_{30} > 0. \qquad (5.3.26b)$$

L'expression (5.3.26a) montre qu'au début (pour des z suffisamment petits) l'amplitude de l'onde de signal diminue. Ceci tient à ce que non seulement l'onde de pompage mais également l'onde de signal cède une partie de son énergie à l'onde vide.

Condition d'amplification paramétrique. — Recherchons la condition d'amplification de l'onde de signal. Commençons par remarquer qu'en pratique on a généralement l'inégalité

$$\delta z \ll 1. \tag{5.3.27}$$

En usant de cette inégalité, mettons l'expression (5.3.25a) sous la forme

$$a_1(z) = a_{10} \exp(-\delta z) \operatorname{ch}(a_{30} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}\, z). \tag{5.3.28}$$

En considérant z comme la longueur de l'amplificateur paramétrique, égale à quelques centimètres, appliquons une relation approchée

$$\operatorname{ch}(a_{30} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}\, z) \approx [\exp(a_{30} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}\, z)]/2, \tag{5.3.29}$$

ce qui permet d'écrire

$$a_1(z) \approx a_{10} \exp[(a_{30} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} - \delta) z]/2. \tag{5.3.30}$$

De (5.3.30) résulte que l'amplitude a_1 de l'onde de signal croîtra si

$$a_{30} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} > \delta. \tag{5.3.31}$$

Cette inégalité exprime la condition nécessaire d'amplification de l'onde de signal.

La fig. 5.8 représente les courbes de variation des amplitudes a_1 et a_2 en fonction de $a_{30}\sqrt{\sigma_1\sigma_2 z}$ construites d'après les relations (5.3.25) (rappelons que nous considérons le cas où $a_{20} = 0$). Pour trouver la valeur de $(a_{30}\sqrt{\sigma_1\sigma_2 z})_1$ pour laquelle l'amplitude a_1 passe par un minimum, on peut se servir de (5.3.28). En annulant la dérivée de la fonction a_1, on trouve

$$(a_{30} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2 z})_1 = \operatorname{Arth}(\delta / a_{30} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}). \tag{5.3.32}$$

Comme le montre (5.3.5), la variation de $a_{30}\sqrt{\sigma_1\sigma_2}$ avec la fréquence ω_1 est la même que celle de la fonction $\sqrt{\omega_1(\omega_3 - \omega_1)}$; cette dernière s'annule pour $\omega_1 = 0$ et $\omega_1 = \omega_3$ et passe par un maximum pour $\omega_1 = \omega_3/2$, c'est-à-dire au régime dégénéré. Par conséquent, la condition d'amplification (5.3.31) peut être considérée comme une exigence imposée à la fréquence ω_1 de vérifier les inégalités

$$\Omega_1 < \omega_1 < \Omega_2, \tag{5.3.33}$$

où Ω_1 et Ω_2 se déterminent à partir de l'équation $a_{30}\sqrt{\sigma_1\sigma_2} = \delta$ (v. fig. 5.9). Soulignons que le gain d'amplification atteint son maximum au régime dégénéré.

Remarquons que nous considérons ici le cas où la condition de synchronisme est exactement satisfaite. S'il y a un désaccord d'onde,

d'autres restrictions peuvent être imposées à la largeur de la bande de fréquences amplifiées.

Résolution des équations tronquées à l'approximation du champ de pompage constant en présence d'un désaccord d'onde. — Envisageons le cas où les ondes en interaction se propagent suivant une

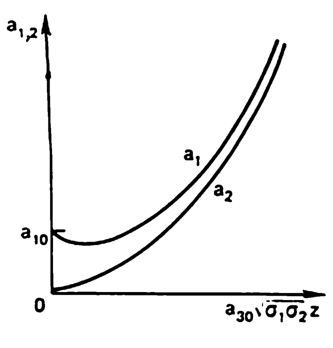


Fig. 5.8

Fig. 5.9

direction qui ne coïncide pas avec la direction de synchronisme ($\Delta k \neq 0$). Supposons que $\delta = 0$ et limitons les descriptions à celles du régime dégénéré ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$, $\sigma_1 = \sigma_2$, $a_1 = a_2$). Le système d'équations (5.3.15) prend alors la forme

$$\left.\begin{aligned} &da_1/dz - \sigma_1 a_1 a_{30} \sin \Psi = 0; \\ &d\Psi/dz - \Delta k + 2\sigma_1 a_{30} \cos \Psi = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.34)$$

Posons $\Psi(0) = \pi/2$ et admettons qu'en première approximation $\cos \Psi(z) \approx 0$. Alors, de la seconde équation du système (5.3.34) on déduit

$$\Psi(z) \approx \Delta kz + \pi/2 \qquad (5.3.35)$$

En tenant compte de (5.3.35), récrivons la première équation (5.3.34) sous la forme

$$da_1/dz - \sigma_1 a_1 a_{30} \cos(\Delta k \cdot z) = 0 \qquad (5.3.36)$$

La solution de cette équation se décrit par l'expression

$$a_1(z) = a_{10} \exp[\sigma_1 a_{30} \sin(\Delta kz)/\Delta k]. \qquad (5.3.37)$$

Signalons que l'expression obtenue permet maintenant de tenir compte des pertes par absorption pour l'onde de fréquence ω_1

$$a_1(z) = a_{10} \exp\left\{\left[\sigma_1 a_{30} \frac{\sin(\Delta kz)}{\Delta kz} - \delta_1\right] z\right\}. \qquad (5.3.38)$$

Les résultats de la résolution numérique des équations (5.3.34) sont représentés sur la fig. 5.10 sous forme de courbes de variation de a_1/a_{10} en fonction de z pour plusieurs valeurs du désaccord réduit $\Delta_1 = \Delta k/2\sigma_1 a_{30}$ [12]. On voit que pour $\Delta_1 < 1$ l'amplitude a_1 croît exponentiellement avec la distance z.

Résolution des équations tronquées au régime non linéaire pour le sous-harmonique. — On convient d'appeler *sous-harmonique* l'onde

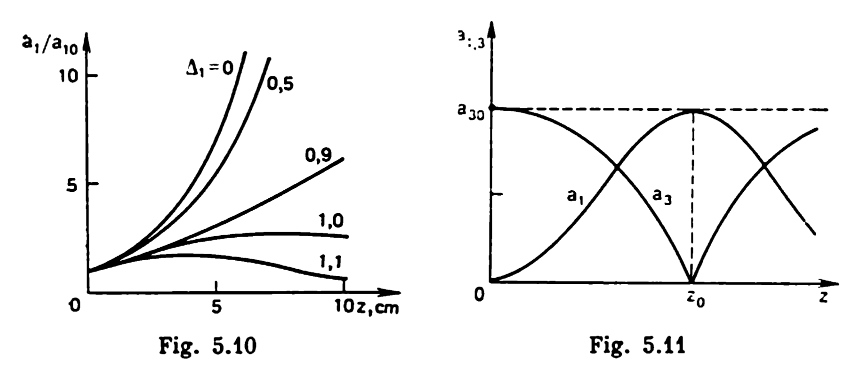


Fig. 5.10 Fig. 5.11

de fréquence $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$. Le régime dégénéré d'amplification (d'oscillation) paramétrique est le régime d'amplification (ou de génération) de sous-harmonique. L'apparition d'un tel terme s'explique par l'analogie qui existe entre la génération de sous-harmonique et celle de deuxième harmonique. Les équations valables pour le sous-harmonique sont identiques aux équations pour le deuxième harmonique; en fait elles ne diffèrent les unes des autres que par les conditions aux limites.

Examinons les solutions pour le sous-harmonique en tenant compte de l'affaiblissement de l'onde de pompage par l'onde de sous-harmonique croissante (c'est-à-dire au régime non linéaire) et dans l'hypothèse où $\Delta k = 0$, $\delta = 0$, $\Psi = \pi/2$. Les équations (5.3.2) prennent dans ces conditions la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} da_1/dz - \sigma_1 a_1 a_3 = 0 ; \\ da_3/dz + \sigma_1 a_1^2/2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.39)$$

En résolvant ce système d'équations, on trouve

$$a_1(z) = b\,\mathrm{sch}\,[\sigma_1 b(z_0 - z)] ; \quad a_3(z) = b\,\mathrm{th}\,[\sigma_1 b(z_0 - z)], \qquad (5.3.40)$$

où $z_0 = \mathrm{Arth}\,(a_{30}/b)/\sigma_1 b$; $b = \sqrt{a_{10}^2 + a_{30}^2}$. Les courbes représentatives des fonctions $a_1(z)$ et $a_3(z)$ sont montrées à la fig. 5.11. Comme il est visible sur cette figure, l'amplitude a_1 de sous-harmonique commence par croître, passe par un maximum pour $z = z_0$ et ensuite décroît. Pour $z > z_0$, il y a régénération de l'onde de pompage. C'est

là que réside la différence fondamentale entre la génération de sous-harmonique et celle de deuxième harmonique pour $\Delta k = 0$ illustrée par la fig. 2.10. A la différence de l'onde du deuxième harmonique, l'onde du sous-harmonique est instable à son maximum, ce qui conduit à une régénération complète de l'onde de pompage.

D'ailleurs, la longueur du cristal non linéaire égale à z_0 ne se réalise pas dans la pratique. C'est ainsi que pour $\sigma_1 b = 1$ cm^{-1}, $a_{10}^2 = 10^{-16} a_{30}^2$, on obtient $z_0 \gg 100$ cm. Avec des longueurs habituelles des cristaux on obtient des gains d'amplification du sous-harmonique de l'ordre de 5 à 10 (en puissance).

Système complet d'équations tronquées pour l'interaction paramétrique à trois fréquences. — L'interaction paramétrique entre trois ondes dans un milieu non linéaire quadratique se décrit dans le cas général par le système suivant d'équations tronquées établies pour les amplitudes complexes [cf. le système (3.6.5)] :

$$\begin{aligned} \hat{M}_1 A_1 &= i\sigma_1 A_3 A_2^* \exp(i\Delta kz); \\ \hat{M}_2 A_2 &= i\sigma_2 A_3 A_1^* \exp(i\Delta kz); \\ \hat{M}_3 A_3 &= i\sigma_3 A_1 A_2 \exp(-i\Delta kz), \end{aligned} \tag{5.3.41}$$

où

$$\hat{M}_n = \frac{\partial}{\partial z} + \delta_n + \beta_n \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2k_n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{u_n}\frac{\partial}{\partial t} + ig_n \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{5.3.42}$$

L'opérateur $\hat{M}_n$ est identique à l'opérateur (3.6.6). Les termes qui entrent dans son expression ont été examinés en détail au § 3.6 (voir aussi [20], [21]). Rappelons que le terme $\beta_n \partial/\partial x$ tient compte du décalage de l'énergie pour les ondes extraordinaires, le terme $i(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)/2k_n$, de la diffraction du faisceau lumineux, le terme $(\partial/\partial t)/u_n$, de l'effet de retard de groupe des impulsions lumineuses, et le terme $ig_n \partial^2/\partial t^2$, du flou de dispersion des impulsions. Les deux derniers termes ne sont à prendre en compte qu'au régime essentiellement non stationnaire lorsque la durée de l'impulsion est égale à quelques picosecondes et même moins. L'interaction paramétrique a été examinée plus haut à l'approximation des ondes planes au régime stationnaire. Dans ce cas, l'opérateur $\hat{M}_n$ prend la forme

$$\hat{M}_n = \partial/\partial z + \delta_n. \tag{5.3.43}$$

§ 5.4. Génération paramétrique du sous-harmonique dans les lasers à pompage continu

Remarques générales; processus transitoires et stationnaires dans les GPL. — Envisageons un cristal non linéaire découpé de telle sorte que les plans de ses faces terminales sont perpendiculaires à la direction de synchronisme pour les ondes de fréquences ω_3, $\omega_1 = \omega_3/2$, $\omega_2 = \omega_3/2$ (ω_3 étant la fréquence de pompage). Sur les face terminales du cristal sont portés des miroirs à transmission

totale pour l'onde de pompage et présentant pour l'onde de fréquence ω_1 les coefficients de réflexion R (0) (face terminale de gauche) et R (l) (face terminale de droite) (fig. 5.12). Le cas que nous considérons correspond à la génération paramétrique de sous-harmonique dans un cristal non linéaire placé à l'intérieur d'une cavité résonnante constituée de deux miroirs plans et parallèles lorsque la condition de synchronisme est exactement satisfaite.

Dans ce qui suit nous examinons la génération paramétrique dans le cas du pompage continu. L'onde de pompage pénètre dans le cristal en arrivant du côté du miroir de gauche (v. la figure 5.12).

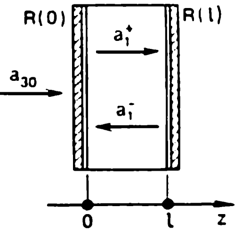


Fig. 5.12

Examinons deux processus successifs. Au début (après l'application de l'onde de pompage), il se déroule le *processus transitoire* de développement de la génération, qui démarre sur le niveau de bruit. Ce processus se termine par l'établissement de la *génération stationnaire*. Le développement initial du processus transitoire peut être étudié à l'approximation du champ de pompage constant. Quant à la génération stationnaire, elle exige dans son principe que l'on tienne compte de l'action de l'onde du sous-harmonique sur l'onde de pompage.

En étudiant le fonctionnement du GPL tant en régime transitoire qu'au régime établi, il est commode de représenter l'onde du sous-harmonique comme une onde directe (se propageant dans le même sens que l'onde de pompage tombant sur le cristal) et une onde inverse (se propageant dans le sens opposé), ayant respectivement les amplitudes a_1^+ et a_1^-. A l'approximation du champ de pompage constant, l'onde de pompage ne se propage dans le cristal qu'en sens direct (rappelons que nous considérons une cavité dont les miroirs sont à transmission totale pour la fréquence de pompage). Au régime non linéaire, en plus de l'onde de pompage directe (d'amplitude a_1^+), il faut tenir compte de l'onde inverse (d'amplitude a_1^-). Cette dernière prend naissance par suite de la génération de deuxième harmonique initié par l'onde du sous-harmonique inverse.

Processus transitoires à l'approximation du champ de pompage constant; condition d'auto-excitation de sous-harmonique. — A l'approximation considérée (a_1 (z) $\ll a_{30}$) pour $\Psi = \pi/2$, l'onde du sous-harmonique directe se décrit par la première équation du système (5.3.15) :

$$da_1^+/dz + \delta_1 a_1^+ - \sigma_1 a_1^+ a_{30} \exp(-\delta_3 z) = 0, \qquad (5.4.1a)$$

et l'onde du sous-harmonique inverse par l'équation

$$-da_1^-/dz + \delta_1 a_1^- = 0 \qquad (5.4.1b)$$

(l'onde du sous-harmonique inverse n'entre pas en interaction avec l'onde de pompage directe). Par raison de simplification, négligeons l'absorption de l'onde de pompage dans le cristal ($\delta_3 = 0$). Soulignons que l'absorption du sous-harmonique ne peut pas être négligée en principe, car δ_1 entre dans l'expression de la condition de seuil de génération. Introduisons la désignation

$$\sigma_1 a_{30} \equiv \sigma. \tag{5.4.2}$$

La quantité σ sera appelée paramètre de couplage non linéaire. En tenant compte de (5.4.2), en posant $\delta_3 = 0$ et en désignant δ_1 par δ, récrivons le système d'équations pour les amplitudes a_1^+ et a_1^- sous la forme

$$\left.\begin{aligned} da_1^+/dz + \delta a_1^+ - \sigma a_1^+ = 0\,; \\ -\,da_1^-/dz + \delta a_1^- = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.4.3}$$

En résolvant ce système, on trouve

$$a_1^+(l) = a_1^+(0) \exp[(\sigma - \delta)\, l]\,; \quad a_1^-(0) = a_1^-(l) \exp(-\delta l). \tag{5.4.4}$$

Les conditions de réflexion sur les miroirs sont de la forme

$$a_1^+(0) = R(0)\, a_1^-(0)\,; \quad a_1^-(l) = R(l)\, a_1^+(l). \tag{5.4.5}$$

L'amplification du sous-harmonique dans la cavité sera représentée par une suite de cycles dont chacun correspond à un parcours aller et retour de la cavité, c'est-à-dire comporte la traversée de la cavité dans le sens direct, la réflexion sur le miroir de droite, la traversée dans le sens opposé et la réflexion sur le miroir de gauche. La fluctuation du sous-harmonique d'amplitude $a_1^+(0)$ (et de vecteur d'onde orienté dans le sens positif de l'axe de la cavité) qui prend naissance sur le miroir de gauche est amplifiée au cours du parcours aller grâce à l'interaction avec l'onde de pompage et acquiert l'amplitude $a_1^+(0) \exp[(\sigma - \delta)\, l]$ (on suppose que $\sigma > \delta$). Après la réflexion sur le miroir de droite on a $R(l)\, a_1^+(0) \exp[(\sigma - \delta)\, l]$. Au cours du parcours retour, l'amplitude du sous-harmonique diminue par suite de l'absorption dans le cristal: $R(l)\, a_1^+(0) \exp[(\sigma - 2\delta)\, l]$. Enfin, après la réflexion sur le miroir de gauche, on obtient $R(0)\, R(l) \times a_1^+(0) \exp[(\sigma - 2\delta)\, l]$. Pour l'amplification du sous-harmonique il est nécessaire que l'amplitude obtenue soit plus grande que l'amplitude initiale $a_1^+(0)$. Ainsi, la condition d'auto-excitation de sous-harmonique dans la cavité résonnante peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{R(0)\, R(l) \exp[(\sigma - 2\delta)\, l] > 1.} \tag{5.4.6}$$

Il en découle que l'*amplitude de seuil* de l'onde de pompage $(a_{30})_{\text{seuil}}$ se définit par la relation

$$R(0)\, R(l) \exp[\sigma_1 (a_{30})_{\text{seuil}} l - 2\delta l] = 1. \tag{5.4.7}$$

Par conséquent,

$$(a_{30})_{\text{seuil}} = \frac{1}{\sigma_1}\left[2\delta + \frac{1}{l}\ln\frac{1}{R(0)\,R(l)}\right]. \qquad (5.4.8)$$

Désignons par ρ_{ray} le coefficient de pertes par rayonnement (pertes utiles):

$$\rho_{\text{ray}} = \frac{1}{l}\ln\frac{1}{R(0)\,R(l)}, \qquad (5.4.9)$$

après quoi la relation (5.4.8) prend la forme

$$\sigma_{\text{seuil}} = (a_{30})_{\text{seuil}}\sigma_1 = 2\delta + \rho_{\text{ray}}. \qquad (5.4.10)$$

Le paramètre de seuil de couplage non linéaire est égal à la somme des coefficients de pertes nuisibles (passives) et de pertes par rayonnement. La condition d'auto-excitation de sous-harmonique (5.4.6) peut s'écrire maintenant sous une forme très laconique:

$$\boxed{\sigma > \sigma_{\text{seuil}}.} \qquad (5.4.11)$$

Méthode des pas successifs. — L'analyse du développement des processus de génération, basée sur l'étude des cycles successifs dont chacun correspond à un parcours aller et retour de la cavité résonnante, constitue l'essentiel de la *méthode des pas successifs* [1]). En utilisant les résultats obtenus précédemment, écrivons les expressions de l'amplitude a_1^+ sur les miroirs de gauche et de droite pour une suite de plusieurs premiers cycles (le deuxième indice numérique désigne le numéro du cycle):

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}^+(l) &= a_0 \exp[(\sigma-\delta)\,l];\\
a_{12}^+(0) &= a_0[1+\exp(ql)];\\
a_{12}^+(l) &= a_0[1+\exp(ql)]\exp[(\sigma-\delta)\,l];\\
a_{13}^+(0) &= a_0[1+\exp(ql)+\exp(2ql)];\\
a_{13}^+(l) &= a_0[1+\exp(ql)+\exp(2ql)]\exp[(\sigma-\delta)\,l].
\end{aligned}\right\} \qquad (5.4.12)$$

Ici, a_0 est la fluctuation initiale du sous-harmonique sur le miroir de gauche:

$$q = \sigma - 2\delta - \rho_{\text{ray}} = \sigma - \sigma_{\text{seuil}}. \qquad (5.4.13)$$

Pour le N-ième cycle on a

$$a_{1N}^+(0) = a_0\{1+\exp(ql)+\exp(2ql)+\ldots$$
$$\ldots+\exp[(N-1)\,ql]\} = a_0[\exp(Nql)-1]/[\exp(ql)-1]. \qquad (5.4.14)$$

[1]) A part la méthode des pas successifs, dans la théorie des GPL on utilise encore la méthode des équations complètes aux dérivées partielles [12]. Dans cette méthode, les ondes directes et inverses sont remplacées par des ondes stationnaires ayant des amplitudes et des phases lentement variables dans le temps.

Ainsi, le gain d'amplification du sous-harmonique pour N cycles s'exprime par

$$G = a_{1N}^{+}(0)/a_0 = [\exp(Nql) - 1]/[\exp(ql) - 1]. \qquad (5.4.15)$$

Lorsque le nombre de cycles N est suffisamment grand, l'amplification du sous-harmonique peut atteindre une valeur bien élevée. Ainsi, pour $q = 0{,}5\ \mathrm{cm}^{-1}$, $l = 2$ cm, $N = 30$, la relation (5.4.15) donne $G \approx 10^{13}$. Pour de telles valeurs du coefficient d'amplification l'amplitude du sous-harmonique qui s'accroît avec le temps (d'un cycle à l'autre) peut devenir égale à celle de l'onde de pompage. Il est évident que dans de tels cas l'approximation du champ de pompage constant cesse d'être applicable.

Régime non linéaire stationnaire; condition de génération stationnaire de sous-harmonique. — En passant à l'examen de la génération *stationnaire* de sous-harmonique, il faut considérer le *régime non linéaire* qui tient compte de la réaction du sous-harmonique sur l'onde de pompage. Utilisons les équations (5.3.2) en y posant $\Delta k = 0$, $\Psi = \pi/2$, $a_2 = a_1$:

$$\left.\begin{aligned} da_1/dz + \delta a_1 - \sigma_1 a_1 a_3 = 0\,; \\ da_3/dz + \delta a_3 + \sigma_3 a_1^2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.16)$$

La première équation du système (5.4.16) donne pour le trajet aller du sous-harmonique dans le cristal

$$a_1^{+}(l) = a_1^{+}(0) \exp[(\langle\sigma^{+}\rangle - \delta)\, l] \qquad (5.4.17a)$$

et pour le trajet retour

$$a_1^{-}(0) = a_1^{-}(l) \exp[(\langle\sigma^{-}\rangle - \delta)\, l]. \qquad (5.4.17b)$$

Ici

$$\langle\sigma^{\pm}\rangle = \frac{\sigma_1}{l}\int_0^l a_3^{\pm}(z)\, dz \qquad (5.4.18)$$

est le paramètre de couplage non linéaire moyenné sur la longueur de la cavité (pour le parcours aller ou retour). Autrement dit, c'est le gain d'amplification moyenné sur la longueur.

Bien qu'elles présentent une similitude de forme, les équations (5.4.17) et (5.4.4) sont différentes l'une de l'autre. L'équation (5.4.4) fait intervenir le paramètre initial de couplage non linéaire, défini par la relation (5.4.2) et jouant le rôle de gain initial d'amplification. Pour le développement du processus d'amplification du sous-harmonique il est nécessaire que ce paramètre soit *plus grand* que σ_{seuil}. Quant à l'équation (5.4.17), elle comporte le paramètre de couplage non linéaire moyenné sur la longueur, défini par la relation (5.4.18) (plus exactement, deux paramètres moyennés: $\langle\sigma^{+}\rangle$ et $\langle\sigma^{-}\rangle$). En utilisant l'équation (5.4.17) conjointement avec les con-

ditions sur les miroirs (5.4.5), nous pouvons exprimer l'amplitude a_1^+ du sous-harmonique à la fin du cycle par l'intermédiaire de l'amplitude au début du cycle; puis, en égalant ces amplitudes entre elles, on obtient la relation

$$\langle\sigma\rangle \equiv \langle\sigma^+\rangle + \langle\sigma^-\rangle = 2\delta + \rho_{ray} \qquad (5.4.19)$$

qui peut être mise, compte tenu de (5.4.10), sous la forme

$$\langle\sigma\rangle = \sigma_{seuil}. \qquad (5.4.20)$$

C'est la *condition de génération stationnaire de sous-harmonique.* Soulignons à ce propos que a_1^+ (0) n'est plus maintenant une fluctuation du sous-harmonique mais son amplitude stationnaire (établie) avant le commencement du cycle suivant. Ainsi, les équations (5.4.4) décrivent le processus *transitoire* d'amplification de l'amplitude du sous-harmonique à partir de sa valeur initiale de fluctuation, alors que les équations (5.4.17) décrivent la génération permanente lorsque toutes les amplitudes sont stationnaires. Dans le premier cas, $\sigma > > \sigma_{seuil}$ et l'amplitude de sous-harmonique en un point fixé du cristal croît d'un cycle à l'autre (c'est-à-dire varie dans le temps), alors que dans le second cas, $\langle\sigma\rangle = \sigma_{seuil}$ et l'amplitude de sous-harmonique en un point donné du cristal se reproduit d'un cycle à l'autre. La fig. 5.13 montre qu'après l'application de l'onde de pompage (à l'instant $t = 0$) le gain d'amplification diminue à partir de sa valeur initiale $\sigma_1 a_{30}$ jusqu'à sa valeur stationnaire $\langle\sigma\rangle = \sigma_{seuil}$. Pendant ce temps l'amplitude du sous-harmonique a_1^+ augmente à partir de sa valeur de fluctuation jusqu'à sa valeur stationnaire a_{st}. En d'autres termes, au bout de ce temps s'achève le processus de développement des oscillations paramétriques et s'établit le régime de génération permanente. Les régions *1* et *2* marquées sur l'axe du temps se rapportent: la première, à l'utilisation des équations (5.4.3) et (5.4.4) (approximation du champ de pompage constant), et la seconde, à l'utilisation des équations (5.4.16) et (5.4.17) (régime non linéaire de génération de sous-harmonique).

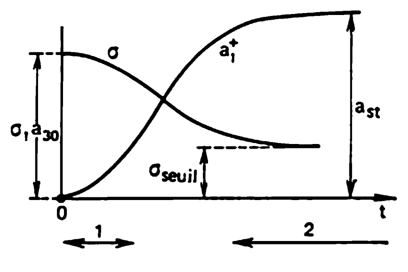


Fig. 5.13

Equations pour la détermination des amplitudes stationnaires du sous-harmonique. — Au régime stationnaire de génération de sous-harmonique le générateur paramétrique de lumière « ne se souvient pas » de son évolution à partir de bruit; les amplitudes stationnaires du sous-harmonique ne dépendent pas de la densité de puissance du

bruit. Le régime stationnaire se détermine entièrement par les paramètres de pompage et de la cavité contenant le cristal non linéaire.

En résolvant le système d'équations (5.4.16) pour les amplitudes des ondes directes, on obtient

$$a_3^+(z) = a \exp(-\delta z) \operatorname{th}[\sigma_1 a (\xi_0^+ - \xi)], \qquad (5.4.21)$$

où

$$\xi(z) = \frac{1}{\delta}(1 - e^{-\delta z}); \quad \xi_0^+ = \operatorname{Arth}\frac{a_{30}}{a};$$

$$a^2 = a_{30}^2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(a_1^+(0))^2. \qquad (5.4.22)$$

En introduisant (5.4.21) dans (5.4.18), on trouve

$$\langle\sigma^+\rangle = \ln \operatorname{ch}\{\sigma_1 a [\xi_0^+ - \xi(l)]\}/l. \qquad (5.4.23)$$

Le miroir de droite ne réfléchissant pas l'onde de pompage, on a

$$a_3^-(l) = 0. \qquad (5.4.24)$$

Pourtant, comme il a été dit plus haut, l'amplitude $a_0^-(z)$ n'est pas nulle puisque sur le parcours de retour l'onde de pompage se régénère sous forme du deuxième harmonique de l'onde du sous-harmonique (les conditions de synchronisme pour la génération paramétrique de sous-harmonique et la génération non linéaire de deuxième harmonique à partir du sous-harmonique sont identiques). En tenant compte de (5.4.24), on obtient

$$a_1^-(0) = a_1^-(l) \operatorname{sch}[\sigma_1 a_1^-(l)\, l], \qquad (5.4.25)$$

$$a_3^-(0) = \sqrt{\sigma_2/\sigma_1}\, a_1^-(l) \exp(-\delta l) \operatorname{th}[\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, a_1^-(l)\, \xi(l)]. \qquad (5.4.26)$$

Il en résulte que

$$\langle\sigma^-\rangle = -\ln \operatorname{ch}[\sigma_1 a_1^-(l)\, \xi(l)]/l. \qquad (5.4.27)$$

Les relations (5.4.17), (5.4.23), (5.4.27) et (5.4.5) constituent un système complet d'équations pour la détermination des amplitudes stationnaires $a_1^+(0)$, $a_1^+(l)$, $a_1^-(0)$, $a_1^-(l)$ et donc des gains d'amplification stationnaires $\langle\sigma^+\rangle$ et $\langle\sigma^-\rangle$. La résolution de ce système d'équations n'est possible que sur ordinateur.

Coefficient de conversion en sous-harmonique. — Les résultats du calcul du système d'équations indiqué, effectué sur ordinateur à condition que $\delta = 0$ et $R(0) = 1$, sont représentés sur la fig. 5.14 sous forme de courbes de variation de η en fonction de $R^2(l)$, où

$$\eta = [1 - R^2(l)]\,[a_1^+(l)/a_{30}]^2 \qquad (5.4.28)$$

est le coefficient de conversion en puissance. Ces courbes sont obtenues pour différentes valeurs du paramètre initial de couplage non linéaire $\sigma_1 a_{30} = 0{,}3\ \text{cm}^{-1}$ (courbe *1*); $\sigma_1 a_{30} = 0{,}5\ \text{cm}^{-1}$ (courbe *2*); $\sigma_1 a_{30} = 1{,}0\ \text{cm}^{-1}$ (courbe *3*); $\sigma_1 a_{30} = 1{,}5\ \text{cm}^{-1}$ (courbe *4*).

Comme il est bien visible sur cette figure, il existe une valeur optimale du coefficient de réflexion $R_{opt}(l)$ du miroir de sortie pour laquelle le coefficient de conversion en sous-harmonique et donc la puissance de sortie du sous-harmonique sont maximaux. Une conversion totale ($\eta = 1$) dans le schéma considéré du GPL n'est possible, à ce qu'il paraît, que pour $R(l) = 0$. Ceci s'explique par l'existence de pertes supplémentaires (non linéaires) du sous-harmonique liées à la régénération de l'onde de pompage au cours du retour. Ces pertes augmentent en même temps que la puissance du sous-harmonique; il en résulte que la cavité réfléchit vers l'arrière une partie considérable de l'énergie de pompage malgré le fait que les miroirs de cavité sont transparents à l'onde de pompage. Ainsi, on est ici en présence d'une sorte de miroir non linéaire dont le coefficient de réflexion à la fréquence de pompage augmente avec la puissance de pompage tombant sur le cristal.

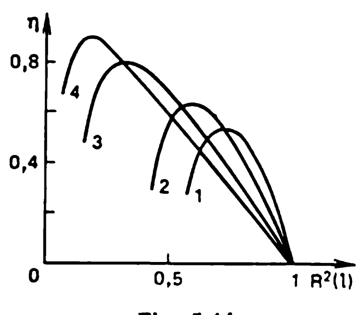


Fig. 5.14

Pour en terminer, signalons que les pertes non linéaires liées à la régénération de l'onde de pompage sur le retour peuvent être éliminées par le choix d'un schéma optique approprié du GPL (v. § 5.6).

§ 5.5. Génération paramétrique de sous-harmonique dans les lasers à pompage par impulsion

Développement du processus de génération de sous-harmonique à l'approximation du champ de pompage constant. — Supposons que le pompage est effectué par une impulsion rectangulaire de durée τ_p et d'amplitude a_{30}. Pendant le temps τ_p le rayonnement décrira $N_0 = \tau_p/\tau_0$ parcours aller et retour dans la cavité résonnante ($\tau_0 = 2ln/c$). A l'approximation du champ de pompage constant, d'après (5.4.14) l'amplitude du sous-harmonique sur le miroir de gauche au bout de N parcours aller et retour ($N \leqslant N_0$) a pour valeur

$$a_{1N}^{+}(0) = a_0 [\exp(qlN) - 1]/[\exp(ql) - 1]. \qquad (5.5.1)$$

La densité de puissance correspondante du sous-harmonique s'exprime par

$$S_{1N}^{+}(0) = S_0 [\exp(qlN) - 1]^2/[\exp(ql) - 1]^2, \qquad (5.5.2)$$

où $S_0 = cn_1a_0^2/8\pi$ est la densité de puissance de bruit du sous-harmonique.

Le temps courant t étant lié au nombre N de parcours aller et retour par la relation $t = N\tau_0$, l'expression (5.5.2) permet de dé-

terminer la variation de la densité de puissance du sous-harmonique en fonction du temps

$$S_1^+(0,\ t) = S_0\,[\exp(qlt/\tau_0) - 1]^2/[\exp(ql) - 1]^2. \qquad (5.5.3)$$

En passant du miroir de gauche à celui de droite, mettons l'expression (5.5.3) sous la forme

$$S_1^+(l,\ t) = S_0 \exp[2(\sigma - \delta)\,l]\,\frac{[\exp(qlt/\tau_0) - 1]^2}{[\exp(ql) - 1]^2}. \qquad (5.5.4)$$

En intégrant (5.5.4) entre $t = 0$ et $t = \tau_p$ et en multipliant par la surface de la section transversale s du faisceau ainsi que par $[1 - R^2(l)]$, on trouve l'énergie de l'impulsion de sortie du sous-harmonique (du côté du miroir de droite)

$$E_{1\,\text{sor}} = s\,[1 - R^2(l)] \int_0^{\tau_p} S_1^+(l,\ t)\,dt = M\,\{\tau_p + (\tau_0/2ql) \times$$
$$\times [3 + \exp(2ql\tau_p/\tau_0) - 4\exp(ql\tau_p/\tau_0)]\}, \qquad (5.5.5)$$

où

$$M = sS_0\,[1 - R^2(l)] \exp[2(\sigma - \delta)\,l]/[\exp(ql) - 1]^2. \qquad (5.5.6)$$

L'énergie de l'impulsion de pompage a pour valeur

$$E_3 = s\tau_p c n_3 a_{30}^2/8\pi. \qquad (5.5.7)$$

Si l'on divise (5.5.5) par (5.5.7), on peut déterminer le coefficient de conversion en énergie.

Sur la fig. 5.15 on a comparé les densités de puissance de pompage ($S_3 = cn_3a_{30}^2/8\pi$) et du sous-harmonique $[S_1^+(l,\ t)]$. Pour cette comparaison on doit admettre que la durée de l'impulsion de pompage est suffisamment petite, si bien que $S_1^+(l,\ \tau_p) \ll S_3$. C'est seulement à cette condition qu'on peut utiliser l'approximation du champ de pompage constant dans tout l'intervalle de temps correspondant à la durée de l'impulsion de pompage.

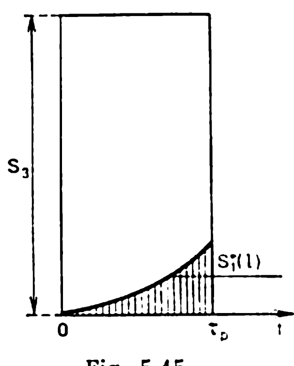


Fig. 5.15

La figure met en évidence une particularité importante qui caractérise le processus de génération en cas de pompage par impulsion : si la durée de l'impulsion de pompage est relativement petite, les oscillations paramétriques peuvent ne pas avoir de temps de s'établir, de sorte que le coefficient de conversion en énergie peut être bien faible.

Caractère non stationnaire des processus dans un GPL pompé par impulsion; régime quasi stationnaire. — Précédemment, lors de l'étude de la génération de deuxième harmonique, nous avons vu que

le caractère non stationnaire du processus était lié au retard de groupe et au flou de dispersion des impulsions, ces phénomènes ne se manifestant que pour des impulsions picosecondes et plus courtes (c'est-à-dire pour des impulsions dont la durée est quelques centaines de fois plus petite que le temps de parcours du rayonnement à travers la cavité résonnante). Vu que dans ce qui suit nous allons examiner des processus pour lesquels les temps caractéristiques de variation de l'intensité pendant l'impulsion sont plus grands que le temps de parcours de la cavité de GPL, les deux phénomènes indiqués sont sans importance. Pourtant, à la différence de la génération de deuxième harmonique, le fonctionnement du GPL se caractérise par un *nouveau type de non-stationnarité* dû au fait que le temps de développement de l'impulsion de génération paramétrique (le temps d'établissement des oscillations paramétriques) $\tau_{\text{dév}}$ peut être du même ordre de grandeur que la durée de l'impulsion de pompage τ_p ou même plus grand que celle-ci.

En tenant compte de la réaction de l'onde du sous-harmonique sur l'onde de pompage, on peut évaluer le temps $\tau_{\text{dév}}$ au régime dégénéré (régime de génération de sous-harmonique) à l'aide des formules suivantes [27]:

$$\tau_{\text{dév}} = (\tau_0/\Delta) \lg (S_1/S_0)/(\sqrt{S_{30}/S_{3\,\text{seuil}}} - 1)\,; \tag{5.5.8a}$$

$$\tau_{\text{dév}} = (\tau_0/\Delta) \lg (S_1/S_0)/(S_{30}/S_{3\,\text{seuil}} - 1), \tag{5.5.8b}$$

où

$$\Delta = 2\,[1 - R\,(l) \exp\,(-2\delta l)] \tag{5.5.9}$$

est une quantité qui décrit les pertes totales du sous-harmonique pendant le parcours aller et retour de la cavité résonnante, y compris les pertes par rayonnement sur le miroir de sortie; S_1, la densité de puissance du sous-harmonique au régime voisin du régime établi; S_0, la densité de puissance de fluctuation du sous-harmonique (densité de puissance de la luminescence paramétrique à la fréquence du sous-harmonique); S_{30} et $S_{3\,\text{seuil}}$ sont respectivement les densités de puissance d'entrée et de seuil de l'onde de pompage. La formule (5.5.8a) est obtenue pour un GPL à deux cavités, et la formule (5.5.8b), pour un GPL à une seule cavité. Signalons qu'au régime dégénéré ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$), le GPL à une seule cavité ne peut être réalisé que selon le schéma à synchronisme non colinéaire (vectoriel). Les formules (5.5.8) montrent que le temps de développement $\tau_{\text{dév}}$ est plus petit pour les GPL à une seule cavité que pour ceux à deux cavités, tous les autres paramètres étant égaux. Les évaluations numériques donnent généralement $\tau_{\text{dév}} \approx 10^{-8}$ s.

Lorsque $\tau_p \leqslant \tau_{\text{dév}}$, l'impulsion n'arrive pas à se développer dans le GPL (v. fig. 5.15). Si $\tau_p > \tau_{\text{dév}}$, c'est la génération de l'impulsion du GPL au régime quasi stationnaire qui commence après l'établissement des oscillations paramétriques. Ceci signifie que mal-

gré la variation dans le temps de l'intensité du pompage, l'intensité des ondes obtenues par génération paramétrique correspond rigoureusement à l'intensité du pompage à chaque instant. Ainsi, tout de suite après le démarrage sur le niveau de bruit, le processus est toujours non stationnaire mais au bout du temps $\tau_{\text{dév}}$ (pour $\tau_p > \tau_{\text{dév}}$) s'établit le régime de génération quasi stationnaire.

La fig. 5.16 représente les courbes comparatives de variation dans le temps de la densité de puissance de l'impulsion de pompage

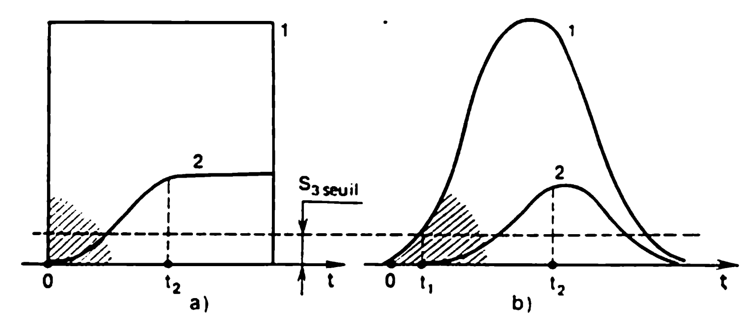


Fig. 5.16

(courbe *1*) et de l'impulsion de sous-harmonique (courbe *2*) pour deux cas : *a*) l'impulsion de pompage a une forme rectangulaire, *b*) l'impulsion de pompage a une forme gaussienne. Dans les deux cas, la durée de l'impulsion de pompage est plus grande que le temps de développement de l'impulsion de sous-harmonique. L'instant $t = 0$ est celui où est appliquée l'impulsion de pompage. Le développement de l'impulsion de sous-harmonique commence dans le cas *a*) à l'instant $t = 0$ et dans le cas *b*) à l'instant t_1 où la densité de puissance de pompage atteint sa valeur de seuil. Par t_2 on a désigné un instant conventionnel où le développement de l'impulsion de sous-harmonique peut être considéré comme achevé. Les régions hachurées sont celles dans lesquelles l'approximation du champ de pompage constant est applicable. En dehors de ces régions, on doit tenir compte de l'action en retour de l'onde de sous-harmonique sur l'onde de pompage.

Si les oscillations paramétriques s'établissent dans le régime non stationnaire suivi du régime quasi stationnaire, on peut appliquer, pour le calcul des GPL pompés par impulsion, une méthode qui consiste à résoudre sur ordinateur une suite de problèmes aux limites [10], [12], [15].

Modèle mathématique d'un GPL fonctionnant au régime quasi stationnaire. — En supposant que $\tau_p \gg \tau_0$, proposons-nous d'examiner le processus de génération paramétrique quasi stationnaire dans le cas de l'interaction non dégénérée colinéaire de trois ondes lumineuses de fréquences respectives ω_1, ω_2, ω_3 ($\omega_3 =$

$= \omega_1 + \omega_2$) dans une cavité résonnante de longueur l, entièrement remplie par un milieu non linéaire quadratique infini dans la direction perpendiculaire à l'axe de la cavité. Le GPL est excité par une impulsion gaussienne dont l'amplitude du champ à l'entrée (pour $z = 0$) a pour expression

$$a_3(r, 0, t) = a_{30} \exp[-2 \ln 2 (t/\tau_p)^2 - (r/\rho_0)^2], \qquad (5.5.10)$$

où a_{30} est l'amplitude du champ de pompage d'entrée au centre du faisceau et au maximum de l'impulsion ; τ_p, la durée de l'impulsion de pompage au niveau de la moitié du maximum d'intensité ; ρ_0, le rayon du cross-over du faisceau de pompage dans le milieu non linéaire. Puisque $\tau_p \gg \tau_0$, il est commode d'approcher (5.5.10) par une fonction de temps en escalier, dont la largeur de l'échelon est égale à τ_0, alors que la valeur du champ du pompage est constante pour un échelon donné ; les échelons seront désignés par les numéros N. L'exposant temporel de l'exponentielle dans (5.5.10) est dans ce cas égal à $\gamma_0 N^2$, où $\gamma_0 = 2 \ln 2 (\tau_0/\tau_p)^2$; γ_0 est appelé paramètre de non-stationnarité du processus.

Pour chaque « pas » de numéro N on résout les problèmes aux limites de l'interaction paramétrique à trois fréquences décrite pour $\Delta k = 0$ par les équations tronquées pour les amplitudes des ondes directes (indice +) et inverses (indice −) [15] :

$$\left.\begin{aligned} &\pm da^{\pm}_{1N}/dz + \delta_1 a^{\pm}_{1N} - \sigma^{\mp}_1 a^{\pm}_{2N} a^{\pm}_{3N} = 0 ;\\ &\pm da^{\pm}_{2N}/dz + \delta_2 a^{\pm}_{2N} - \sigma^{\mp}_2 a^{\pm}_{1N} a^{\pm}_{3N} = 0 ;\\ &\pm da^{\pm}_{3N}/dz + \delta_3 a^{\pm}_{3N} + \sigma^{\mp}_3 a^{\pm}_{1N} a^{\pm}_{2N} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.11)$$

On s'assure aisément que ce système découle de (5.3.2) pour $\Delta k = 0$ et $\Psi = \pi/2$. Les conditions de réflexion sur les miroirs seront représentées sous la forme

$$\begin{aligned} &a^{+}_{iN}(0) = a^{+}_{iN} + R_i(0)\, a^{-}_{iN}(0) ;\\ &a^{-}_{iN}(0) = R_i(l)\, a^{+}_{iN}(i), \qquad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \qquad (5.5.12)$$

où a^{+}_{iN} sont les amplitudes des ondes arrivant dans le GPL de l'extérieur (du côté du miroir de gauche) ; $R_i(0)$ et $R_i(l)$, les coefficients de réflexion en amplitude pour le miroir d'entrée ($z = 0$) et le miroir de sortie ($z = l$). L'amplitude a^{+}_{3N} est décrite par l'expression (5.5.10) en tenant compte que $t = N\tau_0$. Il est judicieux de donner aux amplitudes a^{+}_{1N} et a^{+}_{2N} une valeur de l'ordre de $10^{-7} a_{30}$, ce qui correspond à une densité de puissance des bruits d'entrée aux fréquences ω_1 et ω_2 égale approximativement à 10^{-10} W/cm².

En faisant varier les paramètres $\sigma^{\mp}_i a_{30} l$, $\delta_i l$, γ_0, $R_{1,2}(0)$, $R_{1,2}(l)$, ω_1/ω_2, on peut effectuer à l'aide de l'ordinateur l'optimisation des paramètres de la pompe, de la cavité résonnante et du cristal non linéaire en vue d'obtenir un maximum d'efficacité du GPL. On peut étudier tant les GPL à deux cavités ($R_{1,2}(0) \neq 0$; $R_{1,2}(l) \neq 0$) que ceux à une seule cavité ($R_1(0) \neq 0$, $R_1(l) \neq 0$, $R_2(0) = R_2(l) = 0$). Remarquons que les coefficients de réflexion des miroirs à la fréquence de pompage sont généralement supposés nuls.

Ainsi, en choisissant un modèle mathématique d'un GPL, on part en règle générale des hypothèses simplificatrices principales suivantes : on néglige les effets d'ouverture, le désaccord d'onde et le retard de groupe de l'impulsion, on suppose que les fronts de phase sont plans pour toutes les ondes (on néglige la diffraction), la modulation spatio-temporelle du faisceau de pompage d'entrée est supposée gaussienne. Un tel modèle est adéquat à des GPL réalisés expérimentalement dans le cas du pompage à l'aide d'un laser YAG : Nd^{3+} monofréquence fonctionnant en régime périodique à déclenchement pour de faibles valeurs de la puissance moyenne lorsque les effets d'auto-action thermique ne se

font pas encore sentir. Vu que dans ce cas toutes les fréquences mises en jeu dans le GPL se situent dans l'infrarouge, les effets de photoréfraction et d'absorption non linéaire sont sans importance.

Fonctionnement d'un GPL à deux cavités dégénéré par rapport à la fréquence dans le cas de la répartition transversale uniforme du champ de pompage. — Sur l'exemple de GPL à deux cavités, dégénéré par rapport à la fréquence, on peut étudier à l'approximation de l'onde de pompage plane non modulée dans l'espace les lois principales qui régissent la dynamique de développement de la génération dans un GPL pompé par impulsion [15].

La fig. 5.17 représente un « oscillogramme machine » caractéristique des impulsions de pompage à l'entrée (courbe *1*) et à la sortie

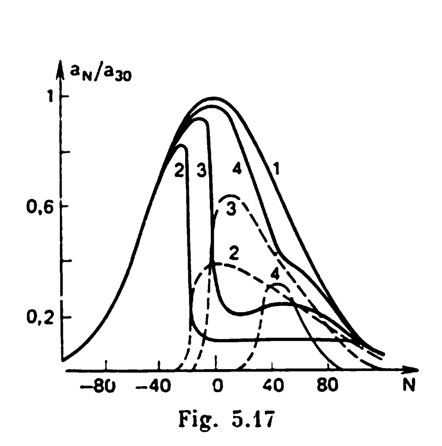


Fig. 5.17

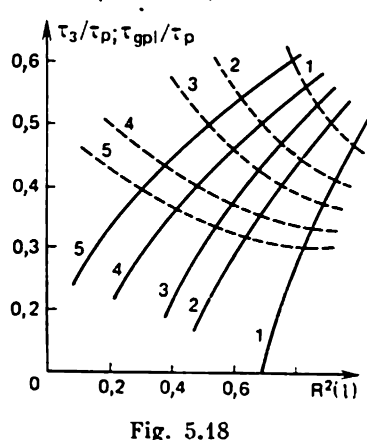


Fig. 5.18

(courbes en traits pleins *2*, *3*, *4*) d'un cristal non linéaire ainsi que des impulsions de sous-harmonique (courbes en traits interrompus *2*, *3*, *4*). Les courbes *2*, *3*, *4* sont obtenues pour différentes valeurs de $R^2(l)$: $R^2(l) = 0{,}9$ (courbe *2*); $R^2(l) = 0{,}7$ (courbe *3*); $R^2(l) = 0{,}5$ (courbe *4*). Les valeurs des paramètres choisies sont les suivantes: $R(0) = 1$, $\gamma_0 = 2\cdot10^{-4}$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0{,}035\ \text{cm}^{-1}$, $\sigma_1^+ = \sigma_1^- = \sigma_2^+ = \sigma_2^- = 0{,}745/a_{30}l$. Signalons principales particularités de ces oscillogrammes: l'impulsion de sous-harmonique ne se développe pas tout de suite mais au bout d'un certain temps (temps de retard) τ_r; le développement de l'impulsion de sous-harmonique s'accompagne d'une chute de l'amplitude de l'impulsion de pompage à la sortie: tout se passe comme si l'impulsion de pompage de sortie était « corrodée » de manière à présenter un « palier de corrosion »; l'impulsion de sous-harmonique est asymétrique (une croissance rapide est suivie d'une chute relativement lente).

Le temps de retard est déterminé par le dépassement de la puissance de pompage par rapport à sa valeur de seuil, il diminue lors-

que le coefficient de réflexion du miroir de sortie augmente ou le paramètre de couplage non linéaire augmente. Les courbes en traits interrompus de la fig. 5.18 représentent la variation de τ_r/τ_p en fonction de $R^2(l)$ pour $R(0) = 1$, $\gamma_0 = 5\cdot10^{-5}$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0{,}035\ \text{cm}^{-1}$ pour différentes valeurs du paramètre $\sigma_1 a_{30} l$: $\sigma_1 a_{30} l = 0{,}5$ (courbe *1*) ; $\sigma_1 a_{30} l = 0{,}745$ (courbe *2*) ; $\sigma_1 a_{30} l = 1{,}0$ (courbe *3*) ;

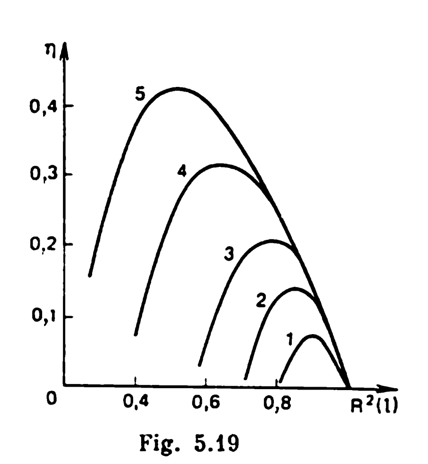


Fig. 5.19

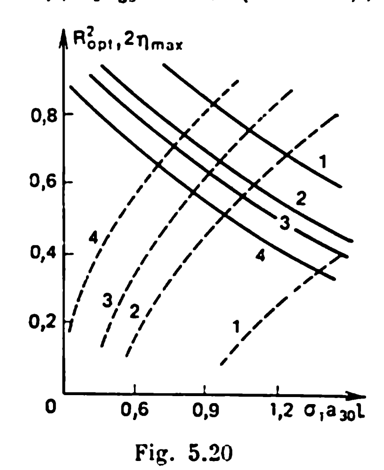


Fig. 5.20

$\sigma_1 a_{30} l = 1{,}5$ (courbe *4*) ; $\sigma_1 a_{30} l = 2{,}0$ (courbe *5*). Les courbes en traits pleins de cette figure traduisent la variation de τ_{gen}/τ_p en fonction de $R^2(l)$, τ_{gen} étant la durée de l'impulsion de sous-harmonique. Notons qu'un raccourcissement considérable de l'impulsion de sous-harmonique est l'indice que le régime de génération est substantiellement non linéaire et peut être mis à profit pour la réalisation de GPL produisant des impulsions courtes à front raide.

En intégrant par rapport au temps les oscillogrammes obtenus sur ordinateur, on peut construire les caractéristiques énergétiques de l'impulsion de sous-harmonique. La fig. 5.19 montre les courbes de variation du coefficient η de conversion en énergie en fonction de $R^2(l)$ pour $R(0) = 1$, $\gamma_0 = 4\cdot10^{-5}$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0{,}035\ \text{cm}^{-1}$ et pour différentes valeurs du paramètre $\sigma_1 a_{30} l$: $\sigma_1 a_{30} l = 0{,}3$ (courbe *1*) ; $\sigma_1 a_{30} l = 0{,}4$ (courbe *2*) ; $\sigma_1 a_{30} l = 0{,}5$ (courbe *3*) ; $\sigma_1 a_{30} l = 0{,}75$ (courbe *4*) ; $\sigma_1 a_{30} l = 1{,}0$ (courbe *5*). De même que sur la fig. 5.14, il est ici bien visible qu'il existe une valeur optimale du coefficient de réflexion $R_{opt}(l)$ du miroir de sortie, pour laquelle le coefficient de conversion atteint sa valeur maximale η^{max}. La fig. 5.20 représente les courbes de variation de $R^2_{opt}(l)$ en fonction de $\sigma_1 a_{30} l$ (courbes en traits pleins) ainsi que celles de $2\eta^{max}$ en fonction de $\sigma_1 a_{30} l$ (courbes en traits interrompus), obtenues pour différentes valeurs du paramètre γ_0 : $\gamma_0 = 5\cdot10^{-4}$ (courbes *1*) ; $\gamma_0 = 10^{-4}$ (courbes *2*) ; $\gamma_0 = 5\cdot10^{-5}$ (courbes *3*) ; $\gamma_0 = 10^{-5}$ (courbes *4*).

§ 5.6. Schémas optiques des générateurs paramétriques de lumière

Schémas classiques des GPL. — En 1962, les savants soviétiques Akhmanov et Khokhlov [5] et, indépendamment d'eux, les savants américains Kroll [6] et Kingston [7] ont proposé le schéma d'un GPL à deux cavités, représenté sur la fig. 5.21. Ce schéma fonctionne

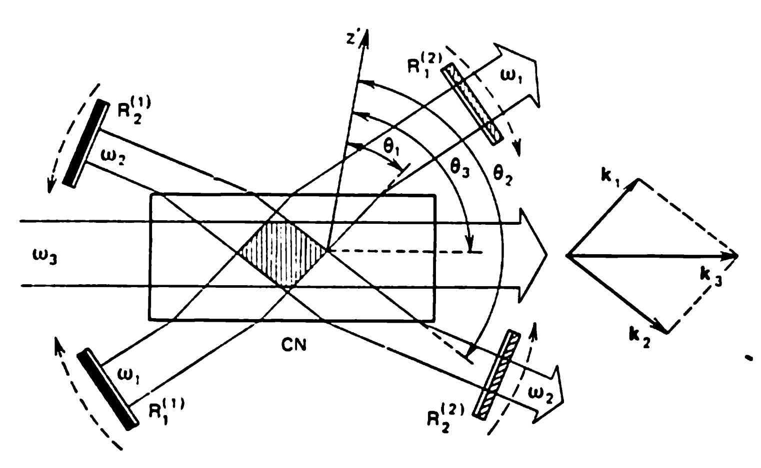


Fig. 5.21

sur la base du synchronisme vectoriel. Il comporte deux cavités résonnantes optiques: l'une pour l'onde de fréquence ω_1 (miroirs à coefficients de réflexion $R_1^{(1)}$ et $R_1^{(2)}$) et l'autre pour l'onde de fréquence ω_2 (miroirs à coefficients de réflexion $R_2^{(1)}$ et $R_2^{(2)}$). L'onde de pompage passe librement à travers le GPL. Dans cette figure on distingue: z', l'axe optique du cristal non linéaire; θ_1, θ_2, θ_3, les angles respectifs que les vecteurs d'onde $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ font avec l'axe optique; la région hachurée correspond à l'interaction paramétrique. La sortie du rayonnement de ce GPL peut s'effectuer au choix sur chacune des fréquences ω_1 et ω_2, ainsi que sur les deux fréquences à la fois. L'accord en fréquence s'obtient par une rotation synchrone des paires de miroirs, les uns à la rencontre des autres, conformément à la condition de synchronisme vectoriel.

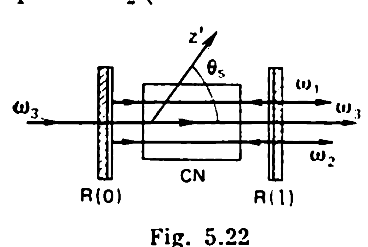


Fig. 5.22

La fig. 5.22 est un autre schéma classique du GPL représentant une variante colinéaire du schéma précédent. En règle générale, dans le schéma de la fig. 5.22 on réalise $R_{1,2}(0) = 1$. Dans ces conditions,

on a $R_3(0) = R_3(l) = 0$, c'est-à-dire que l'onde de pompage traverse librement le GPL. L'accord en fréquence s'obtient au moyen de la rotation du cristal non linéaire par rapport à l'axe de la cavité (par variation de l'angle θ_s). Bien souvent on a également recours à l'accord par variation de température.

Condition d'autoexcitation. — En supposant que $\Delta k = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ et en faisant usage de (5.3.24), écrivons les expressions pour les amplitudes $a_1^+(l)$ et $a_2^+(l)$:

$$\left.\begin{aligned} a_1^+(l) &= [a_1^+(0)\,\mathrm{ch}(\Gamma_0 l) + a_2^+(0)\sqrt{\sigma_1/\sigma_2}\,\mathrm{sh}(\Gamma_0 l)]\exp(-\delta l);\\ a_2^+(l) &= [a_2^+(0)\,\mathrm{ch}(\Gamma_0 l) + a_1^+(0)\sqrt{\sigma_2/\sigma_1}\,\mathrm{sh}(\Gamma_0 l)]\exp(-\delta l).\end{aligned}\right\} \quad (5.6.1)$$

Ici

$$\Gamma_0 = a_{30}\sqrt{\sigma_1\sigma_2}. \quad (5.6.2)$$

Supposons qu'à l'entrée du GPL (pour $z = 0$) prennent naissance des fluctuations des champs aux fréquences ω_1 et ω_2: a_{10}^+ et a_{20}^+. Ainsi

$$a_1^{+(1)}(0) = a_{10}^+;\quad a_2^{+(1)}(0) = a_{20}^+, \quad (5.6.3)$$

où l'indice supérieur désigne le numéro du pas. En introduisant (5.6.3) dans (5.6.2), on obtient les amplitudes $a_1^{+(1)}(l)$ et $a_2^{+(1)}(l)$ à la fin du premier parcours aller de la cavité. Au cours du parcours de retour l'interaction paramétrique ne se produit pas, les pertes non linéaires pour la régénération de l'onde de pompage sont négligeables, si bien que seules les pertes passives subsistent. Ainsi, vers le commencement du deuxième pas (le commencement d'un deuxième parcours aller), on aura

$$\left.\begin{aligned} a_1^{+(2)}(0) &= [a_{10}^+\,\mathrm{ch}(\Gamma_0 l) + a_{20}^+\sqrt{\sigma_1/\sigma_2}\,\mathrm{sh}(\Gamma_0 l)]\times\\ &\qquad\times e^{-2\delta l}R_1(0)\,R_1(l);\\ a_2^{+(2)}(0) &= [a_{20}^+\,\mathrm{ch}(\Gamma_0 l) + a_{10}^+\sqrt{\sigma_2/\sigma_1}\,\mathrm{sh}(\Gamma_0 l)]\times\\ &\qquad\times e^{-2\delta l}R_2(0)\,R_2(l).\end{aligned}\right\} \quad (5.6.4)$$

Pour l'autoexcitation des ondes de fréquences ω_1 et ω_2 il faut que soient réalisées les inégalités $a_1^{+(2)}(0) \geqslant a_{10}^+$ et $a_2^{+(0)} \geqslant a_{20}^+$. Les égalités correspondantes pour les valeurs de seuil sont de la forme

$$a_1^{+(2)}(0) = a_{10}^+;\quad a_2^{+(2)}(0) = a_{20}^+. \quad (5.6.5)$$

En introduisant (5.6.4) dans (5.6.5), on obtient un système d'équations par rapport à a_{10}^+, a_{20}^+:

$$\left.\begin{aligned} a_{10}^+[\mathrm{ch}(\Gamma_0 l)\,Q_1 - 1] + a_{20}^+\sqrt{\sigma_1/\sigma_2}\,\mathrm{sh}(\Gamma_0 l)\,Q_1 &= 0;\\ a_{10}^+\sqrt{\sigma_2/\sigma_1}\,\mathrm{sh}(\Gamma_0 l)\,Q_2 + a_{20}^+[\mathrm{ch}(\Gamma_0 l)\,Q_2 - 1] &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (5.6.6)$$

où

$$Q_1 = \exp(-2\delta l)\, R_1(0)\, R_1(l)\,;$$
$$Q_2 = \exp(-2\delta l)\, R_2(0)\, R_2(l). \qquad (5.6.7)$$

Annulons le déterminant de ce système:

$$\mathrm{ch}\,[(\Gamma_0 l)\,Q_1 - 1]\,[\mathrm{ch}\,(\Gamma_0 l)\,Q_2 - 1] - Q_1 Q_2\,\mathrm{ch}^2(\Gamma_0 l) = 0. \qquad (5.6.8)$$

Cette égalité peut être mise sous la forme

$$\mathrm{sh}^2(\Gamma_0 l)_{\text{seuil}} = (1 - Q_1^2)(1 - Q_2^2)/(Q_1 + Q_2)^2. \qquad (5.6.9)$$

Ainsi, pour $\Delta k = 0$, la condition d'autoexcitation du GPL est de la forme

$$\mathrm{sh}^2(\Gamma_0 l) \geqslant (1 - Q_1^2)(1 - Q_2^2)/(Q_1 + Q_2)^2. \qquad (5.6.10)$$

Lorsqu'il y a un désaccord d'onde, la condition (5.6.10) est remplacée par la condition suivante:

$$\boxed{(\Gamma_0/\Gamma)^2\,\mathrm{sh}^2(\Gamma l) \geqslant (1 - Q_1^2)(1 - Q_2^2)/(Q_1 + Q_2)^2.} \qquad (5.6.11)$$

Ici

$$\Gamma^2 = \Gamma_0^2 - (\Delta k/2)^2. \qquad (5.6.12)$$

En passant d'un GPL à deux cavités à un GPL à une seule cavité de fréquence résonnante ω_1, il faut poser $Q_2 = 0$, après quoi la condition (5.6.11) prend la forme suivante:

$$(\Gamma_0/\Gamma)^2\,\mathrm{sh}^2(\Gamma l) \geqslant (1 - Q_1^2)/Q_1^2. \qquad (5.6.13)$$

Densité de seuil de puissance de pompage. — Dans le cas où la condition de synchronisme des phases est exactement satisfaite et les valeurs du coefficient d'amplification (du paramètre de couplage non linéaire) sont faibles, la relation (5.6.9) se simplifie:

$$(\Gamma_0 l^2_{\text{seuil}}) = (1 - Q_1^2)(1 - Q_2^2)/(Q_1 + Q_2)^2 \qquad (5.6.14)$$

On en tire pour la densité de seuil de puissance de pompage au régime stationnaire l'expression suivante [21]:

$$S_{3\,\text{seuil}} = (P_0/l^2)(1 - Q_1^2)(1 - Q_2^2)/(Q_1 + Q_2)^2, \qquad (5.6.15)$$

avec

$$P_0 = c^3 n_1 n_2 n_3 / 8\,(2\pi)^3\,\omega_1\omega_2 D_1 D_2 D_3 \qquad (5.6.16)$$

[les coefficients D_i étant déterminés à partir de (5.3.5)].

Pour le régime dégénéré non stationnaire la densité de seuil $S_{3\,\text{seuil}}$ peut être évaluée à l'aide de la formule [21]:

$$S_{3\,\text{seuil}} \approx (P_0/l^2)(1 - T^2)^2/4T^2, \qquad (5.6.17)$$

où

$$T = [R(0)\,R(l)]^{\beta} \exp[-4(\delta+\delta_{ns})\,l]. \quad (5.6.18)$$

Les paramètres β et δ_{ns} qui caractérisent l'augmentation des pertes par rayonnement et des pertes passives au régime non stationnaire dépendent de γ et peuvent être déterminés à l'aide du Tableau 5.1. Dans le cas des impulsions de pom-

Tableau 5.1

γ	0	$4\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-3}$
β	1,0	1,2	1,3	1,6	1,72
δ_{ns}, cm^{-1}	0	0,085	0,205	0,280	0,400

page courtes, les pertes non stationnaires δ_{ns} peuvent être sensiblement plus grandes que δ. Par exemple, pour un GPL utilisant un cristal de $LiNbO_3$ de longueur $l = 1$ cm, la valeur de $S_{3\,seuil}$ observée expérimentalement pour $\tau_p = 13$ ns ($\gamma_0 = 5\cdot10^{-4}$), $R(0) = 1$, $R(l) = 0{,}64$ est supérieure de presque un ordre de grandeur à l'intensité de seuil calculée pour le régime stationnaire au moyen de la formule (5.6.15).

Structure cluster du spectre d'un GPL à deux cavités. — Le spectre de fréquences d'un GPL à deux cavités se caractérise par une structure de domaine (cluster) [1]). Ceci signifie qu'au lieu d'une collection de fréquences équidistantes on observe un groupement des fréquences produites en domaines (clusters) [28].

L'apparition de clusters est aisée à comprendre si l'on tient compte du fait que chacune des cavités du GPL à deux cavités possède son propre spectre de fréquences de résonance. Désignons par Ω_1 les *fréquences de résonance* de l'une des cavités, et par Ω_2, celles de l'autre. Supposons que la condition de synchronisme est satisfaite pour les ondes de fréquences ω_1 et ω_2 (compte tenu, bien entendu, de l'onde de pompage de fréquence ω_3). Les fréquences ω_1 et ω_2 seront appelées *fréquences synchrones*. L'existence de collections de fréquences discrètes de résonance pour chacune des cavités d'un GPL à deux cavités peut conduire (et conduit réellement) à ce que si l'une des fréquences synchrones (par exemple, ω_1) *coïncide* avec la fréquence de résonance de « sa » cavité ($\omega_1 = \Omega_1$), l'autre fréquence de résonance *ne l'est pas* ($\omega_2 \neq \Omega_2$). Ainsi, pour les fréquences de résonance Ω_1 et Ω_2 il existe un *désaccord d'onde*, alors que les fréquences synchrones ω_1 et ω_2 se caractérisent par un *désaccord de fréquence* (autrement dit, par un écart par rapport aux centres des raies spectrales des cavités). D'un autre côté, pour les fréquences Ω_1 et Ω_2 il n'y a pas de désaccord de fréquence et pour les fréquences ω_1 et ω_2 il n'y a pas de désaccord d'onde. L'influence des deux désaccords est importante, de sorte que les paires de fréquences produites ne seront que celles pour lesquelles l'effet *résultant* des deux désaccords (compte tenu de la

[1]) Le mot anglais cluster signifie une multitude, un essaim.

largeur de la courbe de synchronisme et de la largeur de la raie spectrale de la cavité) sera minimal et permettra de dépasser le seuil de génération. Il en résulte que le GPL à deux cavités émettra certaines fréquences *intermédiaires* qui ne sont pas exactement en synchronisme et pas exactement aux maximums des raies des cavités. Ces fréquences se groupent en clusters.

La distance d'une certaine fréquence de résonance $\Omega = \Omega_1$ à la fréquence de résonance voisine est déterminée par la relation

$$\Delta\Omega = (\pi c/l)\,[n(\Omega_1) + \Omega_1 (\partial n/\partial\Omega)_{\Omega=\Omega_1}]^{-1}. \qquad (5.6.19)$$

Par suite de la dispersion ou suivant le type d'interaction la distance entre modes $\Delta\Omega$ prend des valeurs différentes pour les cavités du GPL à deux cavités; désignons ces distances par $\Delta\Omega'$ et $\Delta\Omega''$. La distance entre clusters $\Delta\omega_{cl}$ s'exprime par $\Delta\Omega'$ et $\Delta\Omega''$ comme il suit [20]:

$$\Delta\omega_{cl} = \Delta\Omega' \cdot \Delta\Omega'' / |\Delta\Omega' - \Delta\Omega''|. \qquad (5.6.20)$$

Le nombre de raies constituant un cluster dépend du facteur de surtension de la cavité résonnante et de la puissance de pompage.

Indiquons à titre d'exemple un GPL à deux cavités à cristal de KDP fonctionnant dans les conditions suivantes: la longueur de la cavité $l = 5$ cm, $\lambda_3 = 0{,}53$ µm, $\lambda_1 \approx \lambda_2 = 1{,}064$ µm (régime voisin du régime dégénéré); le synchronisme *eoe*, le facteur de surtension de la cavité égal à 10^6. Dans ce cas la distance entre les clusters (suivant l'échelle des longueurs d'ondes) est approximativement égale à 0,3 nm, le nombre de modes par cluster est près de 10 et la distance entre les modes est de l'ordre de 0,01 nm.

Fait important, la structure cluster du spectre de GPL à deux cavités conduit à une *instabilité* des fréquences produites. Il en résulte le passage d'une fréquence à une autre à l'intérieur des clusters ainsi que des sauts des clusters d'une impulsion à l'autre. Tout ceci compromet la stabilité en fréquence du GPL et rend plus difficile la réalisation de l'accord continu de fréquence. Le changement de fréquence se fait par bonds dont la valeur dépend de la distance entre les clusters. Dans les GPL à une seule cavité l'effet cluster ne se manifeste pas, de sorte que leur accord en fréquence est plus progressif.

Schémas d'un GPL à miroir de renvoi [21]. — La valeur de seuil de l'intensité de pompage d'un GPL à deux cavités fonctionnant au régime stationnaire peut être réduite plusieurs fois si l'on introduit dans le schéma optique un miroir de renvoi qui réfléchit (en partie ou en totalité) l'onde de pompage en la renvoyant vers la cavité résonnante de GPL. Ceci exige de choisir spécialement la phase de l'onde de pompage réfléchie, sinon au lieu de l'amplification paramétrique c'est le transfert d'énergie des ondes paramétriques à l'onde de pompage qui se produira au cours du parcours de retour.

La fig. 5.23 représente les schémas de tels GPL : *a*) non colinéaire ; *b*) colinéaire. Dans le schéma *b*) on a $R_3(0) = 0$, alors que dans le schéma *a*) le miroir correspondant est absent. En règle générale, le miroir de renvoi réfléchit totalement l'onde de pompage. Le

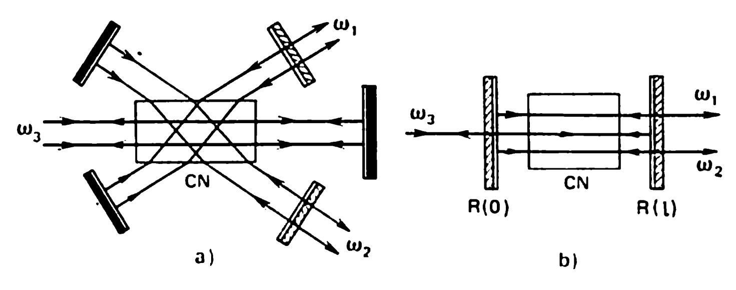


Fig. 5.23

renvoi de l'onde de pompage dans la cavité résonnante permet de réaliser l'interaction paramétrique tant pendant le parcours *aller* que pendant celui *de retour.*

Schémas permettant de supprimer les pertes non linéaires par régénération de l'onde de pompage. — Ce sont les schémas des GPL en anneau dans lesquels les ondes paramétriques ne se propagent que

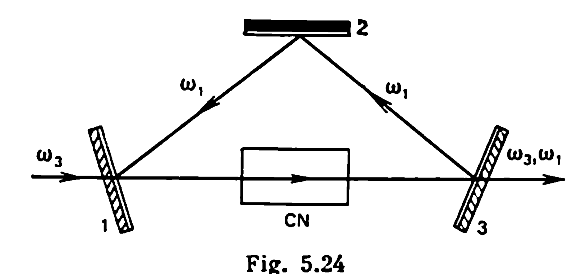


Fig. 5.24

dans le même sens que celui de l'onde de pompage (cette dernière traverse le GPL sans subir des réflexions) [20], [21]. Dans les CPL en anneau les ondes n'effectuent que le trajet aller dans le cristal non linéaire, de sorte que la régénération de l'onde de pompage, qui se produit dans les schémas ordinaires au cours du trajet retour, y est a priori exclue de même que les pertes passives intervenant sur ce trajet. Les expressions donnant les valeurs de seuil pour les GPL à une seule et à deux cavités montées en anneau peuvent s'obtenir à partir des formules (5.6.11) et (5.6.13) à condition de remplacer 2δ par δ dans les expressions donnant Q_i.

Un exemple de schéma d'un GPL en anneau est fourni par le schéma à trois miroirs (fig. 5.24). Ce montage produit un sous-har-

monique; les miroirs *1* et *2* réfléchissent totalement le sous-harmonique, le miroir *3* possède le coefficient optimal à la fréquence du sous-harmonique. Les miroirs *1* et *3* sont totalement transparents à la fréquence de l'onde de pompage.

Les pertes non linéaires par génération de l'onde de pompage peuvent également être éliminées par d'autres procédés. Ainsi, dans certains schémas des générateurs les ondes obtenues par interaction paramétrique se propagent au cours du retour dans une direction

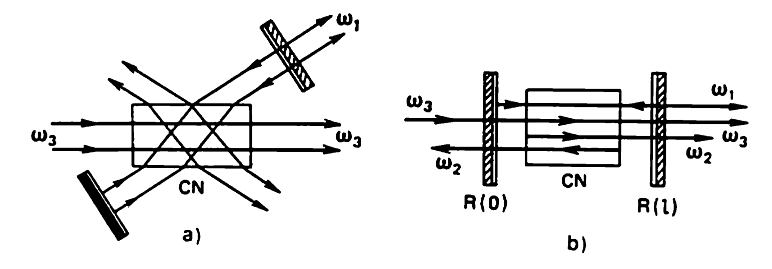


Fig. 5.25

qui diffère de celle de synchronisme pour la génération de leur fréquence somme. On y arrive au moyen d'un non-parallélisme des miroirs de cavité paramétrique ou d'un léger désaccord de la cavité.

Schémas des GPL à une seule cavité. — La fig. 5.25 représente deux schémas classiques d'un tel générateur: *a*) non colinéaire et *b*) colinéaire. Dans le schéma *b*) $R_2(0) = R_3(0) = 0$; $R_2(l) = R_3(l) = 0$. Dans les deux schémas l'onde de résonance est celle de fréquence ω_1; c'est pour cette onde que la cavité résonnante présente le plus haut facteur de surtension.

Il est possible de réaliser une variante de schéma avec retour de l'onde de pompage dans la cavité ($R_3(0) = 0$, $R_3(l) \neq 0$). Dans ce cas, l'amplification paramétrique se produit non seulement dans le parcours aller mais également dans le parcours de retour.

En se servant de (5.6.15), on obtient l'expression suivante pour la valeur de seuil de la densité de puissance de pompage d'un GPL à une seule cavité, fonctionnant au régime stationnaire:

$$S_{3\,\text{seuil}} = (P_0/l^2)\,(1 - Q_1^2)/Q_1^2. \qquad (5.6.21)$$

Dans le cas où l'on utilise le schéma à renvoi de l'onde de pompage, on y doit remplacer P_0/l^2 par $(P_0/l^2)\,[1 + R_3(l)]^{-1}$. On voit que pour $R_3(l) = 1$ la puissance de pompage du GPL à une seule cavité a une valeur deux fois plus petite que dans le schéma sans miroir de renvoi.

Comparés aux schémas des GPL à deux cavités, les schémas des GPL à une seule cavité présentent les avantages importants sui-

vants : insensibilité aux variations de phase sur les miroirs (dues, par exemple, aux vibrations mécaniques des miroirs), absence de pertes non linéaires par régénération de l'onde de pompage sur le trajet de retour, absence de l'effet cluster et stabilité plus haute des fréquences produites. D'un autre côté, le GPL à une seule cavité se caractérise par un seuil plus élevé de puissance de pompage. Comme il résulte de (5.6.15) et (5.6.21), le seuil est $(Q_1 + Q_2)^2/Q_1^2(1 - Q_2^2)$ fois plus élevé dans le GPL à une seule cavité que dans celui à deux cavités (si l'on ne tient pas compte des pertes non linéaires liées à la régénération de l'onde de pompage dans le GPL à deux cavités). Pour

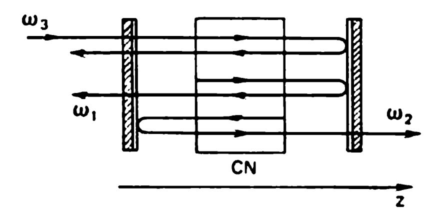


Fig. 5.26

les schémas des GPL à une seule et à deux cavités utilisés en pratique, les seuils de puissance sont différents d'environ 5 fois mais cette différence peut être encore plus grande.

GPL sans cavité résonnante. — La fig. 5.26 montre le schéma d'un GPL dit sans cavité. Dans ce montage, le miroir de gauche (miroir d'entrée) ne réfléchit que l'onde de fréquence ω_2 et laisse passer librement l'onde de fréquence ω_1 et l'onde de pompage ; le miroir de droite réfléchit l'onde de pompage et l'onde de fréquence ω_1 mais laisse passer l'onde de fréquence ω_2. Il est facile de voir que ce schéma ne comporte aucune cavité résonnante, ni à la fréquence ω_1, ni à la fréquence ω_2.

Voyons comment est excité un GPL sans cavité. En interagissant au cours du trajet aller, l'onde de pompage et les fluctuations de champs de fréquences ω_1, ω_2 donnent naissance à des ondes directes de fréquences respectives ω_1 et ω_2. Ayant atteint le miroir de droite, l'onde de fréquence ω_2 quitte le GPL, alors que l'onde de fréquence ω_1 et l'onde de pompage se réfléchissent et effectuent le retour, ce qui donne lieu à la production de l'onde inverse de fréquence ω_2. Pendant le parcours aller suivant, l'onde de pompage entrera en interaction non pas avec les fluctuations de champ de fréquence ω_2 mais avec l'onde de fréquence ω_2 réfléchie sur le miroir de gauche. Il en résultera une amplification de l'onde ω_1. Ce cycle se répète. On obtient ainsi une amplification successive, d'un cycle à l'autre, de l'onde de fréquence ω_1 au cours des parcours aller, et de l'onde de fréquence ω_2 au cours des parcours de retour.

Pour $R_3(l) = 1$ et $\Delta k = 0$ on peut obtenir l'expression suivante pour la valeur de seuil de la densité de puissance de pompage [20] :

$$S_{3\,\text{seuil}} = (P_0/l^2)\,(\text{Arsh}\,[R_1(0)\,R_2(l)\exp(-4\delta l)]^{-1/4})^2. \qquad (5.6.22)$$

GPL à prismes. — Ce sont des GPL dans lesquels les miroirs sont remplacés par des prismes, faits bien souvent en calcite. Le schéma d'un GPL à prismes est représenté par la fig. 5.27 dans laquelle les lignes-rayons en traits pleins désignent l'onde de pompage

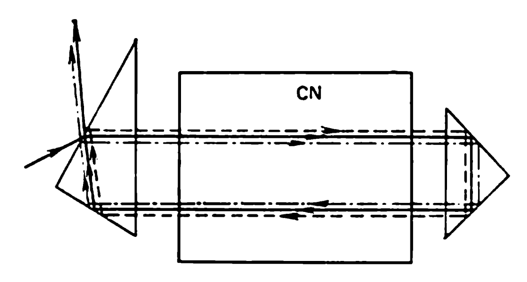


Fig. 5.27

extraordinaire, les rayons en traits interrompus, l'onde ordinaire de fréquence ω_1, les rayons en traits mixtes, l'onde extraordinaire de fréquence ω_2. L'onde ω_1 est confinée dans la cavité résonnante ; la sortie du rayonnement émis par le GPL se fait sur la fréquence ω_2 (ce qui permet de considérer le GPL à prismes comme une variante du GPL à une seule cavité). Le schéma représenté par la figure fonctionne avec le synchronisme *oee* scalaire. Signalons que dans les GPL à prismes l'accord en fréquence dans une large gamme est difficile à réaliser. En revanche, les réflecteurs à prismes sont plus stables aux radiations que les miroirs diélectriques.

§ 5.7. Quelques questions spéciales de la génération paramétrique de lumière

GPL à onde inverse. — Supposons que l'interaction paramétrique se produit entre une onde de pompage, une onde directe ω_1 et une *onde inverse* ω_2 (fig. 5.28, *a*). Dans ce cas les relations (5.2.1) peuvent s'écrire sous la forme

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3\,; \quad k_1 - k_2 = k_3, \qquad (5.7.1)$$

où $k_i = n_i\omega_i/c$ sont les valeurs absolues des vecteurs d'onde des ondes interagissantes. L'interaction décrite par les relations (5.7.1) est à la base des *GPL à onde inverse* [29].

Récrivons la seconde relation (5.7.1) sous la forme

$$n_1\omega_1 - n_2\omega_2 = n_3\omega_3. \qquad (5.7.2)$$

En tenant compte que $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$, on en tire

$$\omega_1/\omega_3 = (n_3 + n_2)/(n_1 + n_2). \tag{5.7.3}$$

Comme le montre la relation (5.7.3), pour $\omega_1 < \omega_3$ doit être vérifiée l'inégalité

$$n_3 < n_1. \tag{5.7.4}$$

Ainsi, pour réaliser un GPL à onde inverse il faut que la vitesse de phase de l'onde de pompage en milieu non linéaire soit *supérieure* à celle de l'une des ondes paramétriques (en l'occurrence, de l'onde ω_1).

Le GPL à onde inverse ne comporte pas de miroirs. Le couplage régénératif nécessaire à l'autoexcitation de la génération s'effectue

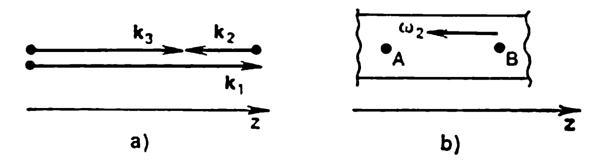


Fig. 5.28

dans tout le volume du milieu non linéaire. Considérons deux points A et B du milieu situés l'un près de l'autre (fig. 5.28, *b*). Supposons que l'amplitude de l'onde ω_2 subisse un accroissement accidentel au point B. Puisque l'onde ω_2 se propage à la rencontre de l'onde de pompage, son amplitude croîtra également au point A et donc l'amplification de l'onde ω_1 qui se propage dans le même sens que l'onde de pompage sera plus intense. Par suite, l'onde ω_1 arrivera au point B avec une amplitude accrue, ce qui conduira à une plus grande augmentation de l'amplitude de l'onde ω_2 au point B. On est donc en présence de la génération [1]. On peut dire que le milieu non linéaire réalise dans ce cas une *réaction repartie.* C'est pourquoi dans de tels GPL l'onde de pompage et les ondes paramétriques sont des ondes purement *progressives* à la différence des GPL ordinaires dans lesquels le couplage régénératif est assuré par des miroirs extérieurs.

Les équations tronquées pour les amplitudes réelles et pour la phase généralisée d'un GPL à onde inverse fonctionnant au régime stationnaire se présentent sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} &da_1/dz + \delta_1 a_1 - \sigma_1 a_2 a_3 \sin\Psi = 0;\\ &-da_2/dz + \delta_2 a_2 - \sigma_2 a_1 a_3 \sin\Psi = 0;\\ &da_3/dz + \delta_3 a_3 + \sigma_3 a_1 a_2 \sin\Psi = 0;\\ &\frac{d\Psi}{dz} + \Delta k + \left(\sigma_1 \frac{a_2 a_3}{a_1} - \sigma_2 \frac{a_1 a_3}{a_2} - \sigma_3 \frac{a_1 a_2}{a_3}\right)\cos\Psi = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.7.5}$$

[1]) La génération n'est certes possible que si la valeur de seuil de la puissance de pompage est dépassée.

où

$$\Delta k = k_1 - k_2 - k_3\,;\quad \Psi = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \Delta kz \qquad (5.7.6)$$

(comparer avec les équations (5.3.2) utilisées pour les GPL ordinaires). En l'absence de pertes linéaires, les solutions des équations (5.7.5) peuvent s'exprimer par l'intermédiaire des fonctions elliptiques [29]. Ces solutions se caractérisent par une particularité. Pour une certaine valeur de la densité de puissance de pompage à l'entrée, les solutions pour l'amplification paramétrique deviennent *infiniment grandes*, ce qui correspond à l'*oscillation*. Ceci est caractéristique des différentes situations de l'interaction des ondes se propageant dans des sens opposés (cellules à effet Mandelschtam-Brillouin stimulé, tubes à onde rétrograde hyperfréquences, etc.).

L'amplitude de l'onde directe ω_1 augmente avec z à partir de sa valeur minimale à l'entrée ($z = 0$) jusqu'à sa valeur maximale à la sortie ($z = l$); l'amplitude de l'onde inverse ω_2 augmente à partir du minimum à la sortie jusqu'à son maximum à l'entrée. L'onde de pompage cède son énergie aux ondes paramétriques : son amplitude décroît lorsque z augmente.

Le coefficient de conversion η_s est déterminé à partir de l'équation

$$K(\eta_s) = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, a_{30} l, \qquad (5.7.7)$$

où

$$K(\eta) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\eta^2 \sin^2\varphi}} \qquad (5.7.8)$$

est l'intégrale elliptique totale de première espèce. En l'absence de pertes linéaires la valeur de seuil de l'amplitude de l'onde de pompage a pour expression

$$a_{3\,\text{seuil}} = \pi/(2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\, l). \qquad (5.7.9)$$

Les expériences montrent que le coefficient de conversion du GPL à onde inverse est plus élevé que celui des GPL de type ordinaire. Il est vrai que cette amélioration du coefficient de conversion s'obtient au prix d'une augmentation de la valeur de seuil de la puissance de pompage. C'est ainsi que pour le cristal de $LiNbO_3$ on a $\sqrt{\sigma_1\sigma_2} \approx 10^{-5}\ V^{-1}$, de sorte que pour $l = 3$ cm on obtient $a_{3\,\text{seuil}} \approx \approx 5\cdot10^4$ V/cm, ce qui correspond à $S_{3\,\text{seuil}} \approx 8\cdot10^6$ W/cm². Les GPL à onde inverse se caractérisent par un domaine relativement large d'accord en fréquence, ils n'exigent pas d'utiliser des revêtements réfléchissants à large bande dont la construction est bien complexe [1]). En outre, ils présentent les avantages tels que l'adaptation

[1]) L'accord en fréquence des GPL à onde inverse s'obtient par rotation du cristal par rapport au faisceau de pompage ou par variation de température (comme dans un GPL de type ordinaire).

optimale à la charge et un petit temps d'établissement des oscillations paramétriques.

On indique [29] que la réalisation des GPL à onde inverse est difficile à cause d'une biréfringence insuffisante dans les cristaux non linéaires. Le synchronisme du type (5.7.1) ne peut être réalisé qu'en régime essentiellement non dégénéré et à condition que la biréfringence soit forte. Ce synchronisme est beaucoup plus facile à assurer dans des milieux non linéaires stratifiés pour lesquels la condition (5.7.1) prend la forme

$$\omega_1+\omega_2=\omega_3\,;\;\; k_1-k_2=k_3-2\pi l_0 \qquad (5.7.10)$$

(l_0 étant la période spatiale de modulation de l'indice de réfraction et donc du coefficient de couplage non linéaire). Le niveau actuel de la technologie des films rend parfaitement possible la réalisation de tels milieux.

Génération paramétrique dans la gamme d'impulsions picosecondes (pompage par des impulsions ultracourtes). — La possibilité d'obtenir, à l'aide de GPL, des impulsions ultracourtes du rayonnement, accordable dans le domaine infrarouge, suscite l'intérêt des chercheurs qui s'occupent de la spectroscopie en infrarouge à haute et à très haute résolution dans le temps. Une des méthodes permettant d'obtenir un tel rayonnement consiste à pomper le cristal non linéaire par des impulsions laser ultracourtes. La puissance de crête très élevée des impulsions ultracourtes permet d'assurer une amplification efficace de la luminescence paramétrique dans le champ de pompage par impulsions ultracourtes (superluminescence paramétrique). Il en résulte, à la sortie du cristal non linéaire placé dans une cavité san miroirs, une onde de superluminescence dont la puissance est suffisante pour de nombreuses applications pratiques.

Dans ce qui suit nous considérons la superluminescence paramétrique dans le champ de pompage par impulsions ultracourtes comme une source de rayonnement infrarouge dans le domaine de longueurs picosecondes des impulsions. On sait (v. § 3.4) que dans ce domaine se manifestent les effets de retard de groupe des impulsions et (à un degré moindre) de flou de dispersion. La densité de puissance de crête des impulsions ultracourtes émises par des lasers à solides à verrouillage des modes longitudinaux atteint 10^9 W/cm^2, ce qui correspond à une amplitude de champ de pompage par impulsion $a_{30}\approx 6\cdot 10^5$ V/cm (dans le cristal de $LiNbO_3$). Ceci permet d'obtenir un gain d'amplification par parcours de l'ordre de 10^{20}. Avec une telle amplification, le régime non linéaire de superluminescence paramétrique (le transfert inverse de l'énergie des ondes paramétriques à l'onde de pompage) peut se produire même sur un seul parcours de l'onde lumineuse à travers le cristal non linéaire. La superluminescence paramétrique dans le champ de pompage par impulsions ultracourtes se décrit par trois équations pour les amplitudes complexes A_1, A_2, A_3. Ces

équations font intervenir des termes en dérivées premières et secondes des amplitudes par rapport au temps, qui tiennent compte respectivement du retard de groupe et du flou de dispersion des impulsions (v. § 3.6). Bornons-nous à écrire les équations pour l'amplitude A_1:

$$\partial A_1/\partial z = ig_1\partial^2 A_1/\partial\mu^2 - \nu_{11}\partial A_1/\partial\mu - i\sigma_1 A_3 A_2^* - \delta_1 A_1, \quad (5.7.11)$$

où $\mu = t - z/u_1$ est le temps local [v. (3.4.13)]; u_1, la vitesse de groupe de l'impulsion d'amplitude A_1; $g_1 = {}^1/_2\partial^2 k_1/\partial\omega_1^2$, le coefficient de flou de dispersion; $\nu_{j1} = u_j^{-1} - u_1^{-1}$, le désaccord de la vitesse de groupe de l'impulsion d'amplitude A_j par rapport à la vitesse de groupe de l'impulsion d'amplitude A_1 (il est évident que $\nu_{11} = 0$, mais $\nu_{21} \neq 0$, $\nu_{31} \neq 0$).

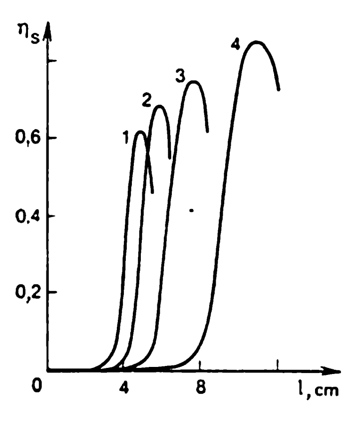


Fig. 5.29

Pour une analyse détaillée de la superluminescence paramétrique dans le champ de pompage par impulsions ultracourtes, voir par exemple [30]. Il a été établi qu'au fur et à mesure de leur amplification dans le cristal non linéaire les impulsions d'ondes paramétriques ont tendance à se rétrécir. Comme le montrent les calculs, l'amplification paramétrique dans le champ d'impulsions ultracourtes permet d'obtenir des impulsions femtosecondes (pour le cristal de $LiNbO_3$, $\tau_1 \approx 6\cdot 10^{-14}$ s). Dans le cas de fortes densités de puissance de pompage par impulsions ultracourtes, c'est pour de petites longueurs d'interaction (pour le cristal de KDP près de 4 cm) que le coefficient de conversion atteint sa valeur maximale qui est limitée par le transfert inverse de la puissance à l'onde de pompage. Une diminution de la densité de puissance de pompage permet d'élever le coefficient de conversion possible, mais la longueur du cristal exigée dans ce cas augmente. La fig. 5.29 représente les courbes de variation de η_s en fonction de l pour un cristal de KDP, $\lambda_3 = 0{,}53$ µm, $\tau_p = 5$ ps. Ces courbes sont construites pour différentes valeurs de S_{30}: $S_{30} = 20$ GW/cm² (courbe *1*); $S_{30} = 15$ GW/cm² (courbe *2*); $S_{30} = 10$ GW/cm² (courbe *3*); $S_{30} = 5$ GW/cm² (courbe *4*) [30].

En effectuant les expériences sur l'excitation de la superluminescence paramétrique dans le champ de pompage par impulsions ultracourtes, on a obtenu des valeurs de $\eta_s \approx 10$ à 12 % [31], [32]. Les schémas les plus efficaces sont ceux qui utilisent deux cristaux de α-HIO_3 placés l'un après l'autre, mais en exploitation les cristaux du groupe de KDP sont plus commodes ($\eta_s \approx 6$ à 8 %). Les études expé-

rimentales ont montré que l'excitation de la superluminescence paramétrique s'accompagne de l'excitation de processus concurrents et en premier lieu de la diffusion Raman stimulée qui réduit de 20 à 30 % l'efficacité de la conversion.

La divergence du rayonnement de pompage et les interactions paramétriques vectorielles entraînent un élargissement du spectre de superluminescence et une diminution de la brillance spectrale du rayonnement de sortie (surtout dans le cas du synchronisme *ooe*). Des largeurs réelles du spectre sont près de 120 cm^{-1} pour le régime

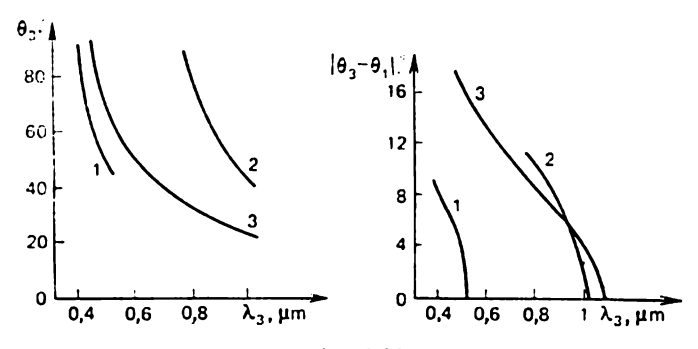


Fig. 5.30

dégénéré et de 10 cm^{-1} pour le régime non dégénéré ($\gamma = 0,4$) dans un cristal de $LiIO_3$. Dans le cas du synchronisme *oee*, le spectre de superluminescence pour un cristal de KDP est de 4 à 5 cm^{-1} quelle que soit la valeur de γ, ce qui s'explique par le fait que la pente des courbes d'accord en fréquence est plus petite pour l'interaction *oee* que pour l'interaction *ooe* (v. fig. 5.5).

Les domaines de changement de longueurs d'onde de la superluminescence paramétrique pour lesquels en plus du synchronisme *de phase* est également réalisé le synchronisme *de groupe* n'existent que pour le régime dégénéré (l'accord en fréquence s'obtient dans ce cas par variation de la longueur d'onde de pompage). La fig. 5.30 montre les courbes de variation des angles θ_3 et $|\theta_3 - \theta_1|$ en fonction de λ_3 pour lesquels se réalisent les deux synchronismes lors de l'interaction *ooe* dans un cristal de KDP (courbes *1*), de $LiNbO_3$ (courbes *2*), de $LiIO_3$ (courbes *3*) [33]. La frontière du domaine du côté des valeurs plus faibles de λ_3 correspond à $\theta_3 = \pi/2$, et du côté des valeurs plus grandes, à l'interaction colinéaire. Pour l'interaction *oee*, la réalisation simultanée du synchronisme de phase et de celui de groupe est à ce qu'il paraît impossible [33].

Signalons pour terminer que dans les GPL à cavités les impulsions ultracourtes de fréquence accordable peuvent être obtenues non seulement par le pompage du générateur par des impulsions laser ultracourtes mais également par la synchronisation des modes du

GPL lui-même en le pompant par des impulsions ordinaires (de 10 à 100 ns) ou en le faisant fonctionner en régime de pompage continu. La synchronisation des modes du GPL peut être effectuée à l'aide de synchronisateurs acousto-optiques ou électro-optiques, ainsi qu'à l'aide de filtres saturables.

GPL à injection du rayonnement à la fréquence de l'onde résonnante. — L'efficacité relativement basse des GPL pulsés tient à ce que les temps de développement de la génération sont grands, alors que les durées des impulsions de pompage sont courtes. Un des

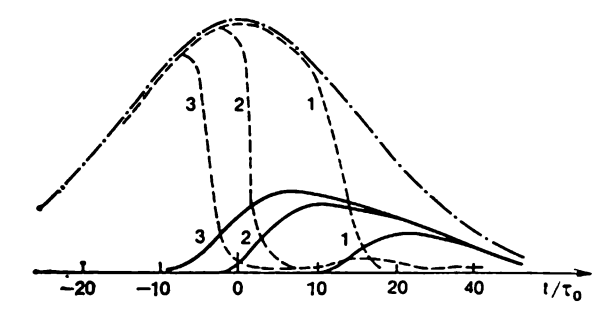


Fig. 5.31

procédés efficaces permettant de réduire le seuil d'impulsion, déterminé par le temps de développement de la génération depuis le niveau de bruit jusqu'à un certain niveau minimal enregistré, consiste à *injecter* un rayonnement de fréquence de l'onde résonnante.

Il a été montré [34] que l'injection d'un rayonnement à bande étroite de faible puissance (de l'ordre de 10^{-6} W) était un moyen radical pour diminuer la largeur de la raie d'émission et pour stabiliser la fréquence. Les questions relatives à l'influence que l'injection d'un rayonnement extérieur a sur les caractéristiques énergétiques des GPL à une seule cavité ont été étudiées dans les ouvrages [35], [36]. Les calculs montrent que l'injection dans un GPL pulsé à une seule cavité d'un rayonnement extérieur ayant une densité de puissance supérieure de plusieurs ordres de grandeur à celle de bruit a pour effet de réduire le temps de développement de l'impulsion émise et d'augmenter notablement l'efficacité de la conversion (cette augmentation est d'autant plus grande que la différence entre la puissance de l'impulsion de pompage et la puissance de seuil est plus petite). La fig. 5.31 montre les courbes des « oscillogrammes machine » des impulsions de génération paramétrique (courbes en traits pleins) et des impulsions de pompage (courbes en traits interrompus) à la sortie d'un GPL à une seule cavité pour différentes valeurs du rapport de la densité de puissance du rayonnement injecté à la densité de puissance de bruit : 1 (courbes *1*) ; 10^4 (courbes *2*) ; 10^6 (cour-

bes *3*). La courbe en trait mixte désigne l'impulsion de pompage de forme gaussienne agissant à l'entrée (τ_0 étant le temps de parcours de la lumière à travers la cavité du GPL). La fig. 5.32 représente les courbes de l'efficacité η d'un GPL à une seule cavité sans injection de rayonnement extérieur (η_1, courbe *1*) et avec injection d'un rayonnement extérieur de 100 à 500 W (η_2, courbe *2*), ainsi que du rapport η_2/η_1 (courbe *3*). Ces courbes montrent la variation des grandeurs indiquées en fonction du rapport de la densité de puissance de pompage à la puissance de seuil. La méthode d'injection offre les plus grands

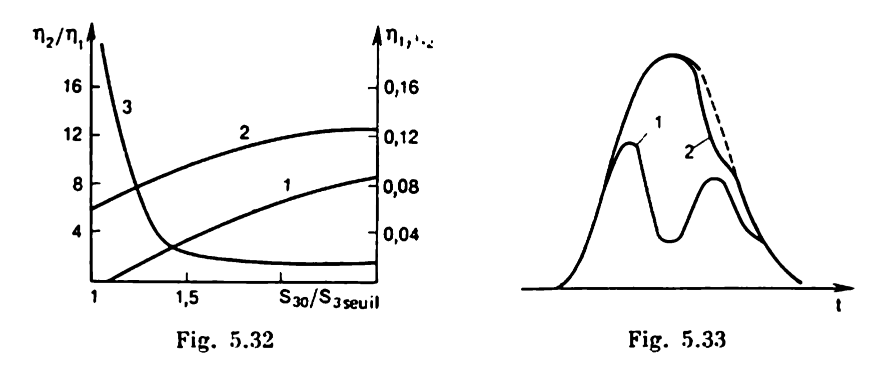


Fig. 5.32

Fig. 5.33

avantages aux extrémités du domaine d'accord en fréquence, où le seuil de génération de l'impulsion n'est dépassé que légèrement.

Les études des GPL à une seule cavité avec injection d'un rayonnement extérieur de faible puissance ont démontré d'une manière convaincante que l'une des voies à suivre pour la réalisation des GPL efficaces à raie de génération étroite était la séparation des fonctions de génération du rayonnement et de son amplification dans deux GPL spécialisés distincts, le rayonnement de l'un étant injecté dans l'autre. Un tel schéma diffère du schéma laser-amplificateur ordinaire par le caractère superrégénératif de l'amplification du signal injecté par le second GPL (v. aussi [37]). L'accord en fréquence du rayonnement de sortie peut s'obtenir au moyen d'un système automatisé d'accord synchrone des deux GPL.

GPL à cavité instable [1]). — Dans le cas où la répartition de la densité de puissance de pompage suivant la section transversale du faisceau est *inhomogène* (par exemple, gaussienne), le temps de développement de la génération paramétrique est minimal sur l'axe du faisceau et augmente vers sa périphérie. Si S_{30} est suffisamment grande, le temps de développement de la génération dans la région centrale du faisceau de pompage peut se trouver si petit que la génération se développe même sur le *front d'entrée* de l'impulsion de pom-

[1]) Ce sous-paragraphe a été rédigé avec le concours de A. Soloviev.

page. Il en résulte, sur la courbe représentative de l'impulsion de pompage, une « érosion » de la densité de puissance à des instants correspondants. Pourtant, par la suite, les ondes paramétriques développées dans la région centrale du faisceau de pompage commencent à céder une partie de leur énergie à l'onde de pompage, ce qui conduit à une certaine augmentation de la densité de puissance de pompage. De ce fait, le graphique de l'impulsion de pompage à la sortie du GPL, dressé pour la région centrale du faisceau, prend la forme d'une courbe à deux maximums (v. courbe *1* de la fig. 5.33 [38]). Dans les régions périphériques du faisceau de pompage le temps de

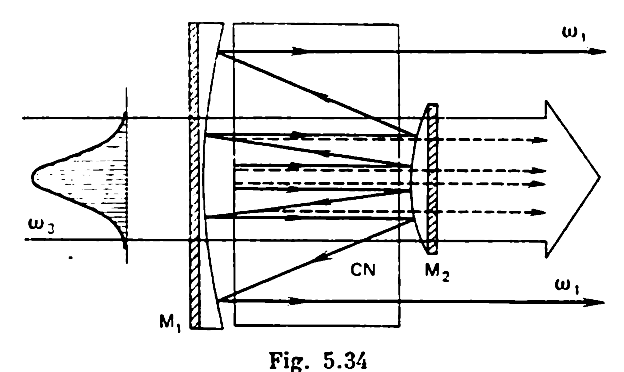


Fig. 5.34

développement de la génération paramétrique est au contraire grand, de sorte que l'impulsion de génération se développe non pas sur le front d'entrée mais sur le front de sortie de l'impulsion de pompage (une telle situation a été représentée sur la fig. 5.16, *b* de § 5.4). L'épuisement de l'onde de pompage est dans ce cas peu important (v. courbe *2* de la fig. 5.33). Les phénomènes que nous venons de signaler ont pour effet que l'impulsion de sortie du GPL se caractérise par une faible énergie pour un coefficient intégral de conversion assez important. En outre, les différentes portions de la section transversale des faisceaux paramétriques entrent en oscillation à des instants différents.

En utilisant une cavité *instable* télescopique [1]), on peut compenser dans une large mesure les irrégularités que le développement de la génération paramétrique présente suivant la section du faisceau. Le schéma d'un GPL à cavité télescopique est montré par la fig. 5.34 dans laquelle *CN* désigne le cristal non linéaire; M_1 et M_2, les miroirs confocaux de cavité. Ces miroirs sont à réflexion totale pour le rayonnement de fréquence ω_1 et à transmission totale pour le rayonnement de pompage et le rayonnement de fréquence ω_2 (on considère

[1]) Pour plus de détail sur les cavités instables, voir par exemple § 2.10 de [39] ainsi que [40].

un GPL à une seule cavité). Le rayonnement de fréquence ω_1 est figuré par des rayons en traits pleins et celui de fréquence ω_2 par des rayons en traits interrompus.

La cavité télescopique offre certains avantages. L'énergie de l'onde résonnante amplifiée (de fréquence ω_1) y est transférée de la région centrale du faisceau de pompage à sa périphérie où le pompage est plus faible; il se produit un « étalement » de l'onde résonnant suivant la section transversale du GPL à une seule cavité. Il en résulte que le temps de développement de la génération augmente dans la région centrale et diminue dans les régions périphériques. L'augmentation tient à ce que l'onde amplifiée de fréquence ω_1 commence à quitter la région centrale, où la puissance de pompage est maximale, même au cours du deuxième parcours à travers le cristal. La diminution est due au fait que l'onde qui quitte la région centrale est injectée dans les régions périphériques où le pompage est plus faible mais la génération démarre non pas depuis les bruits mais sur un signal de fréquence ω_1 de puissance notable. On a ici un analogue d'un amplificateur à superréaction, à plusieurs parcours et à gain élevé. Du fait que l'onde amplifiée ω_1 quitte la région axiale, le transfert inverse à l'onde de pompage diminue.

Bibliographie

1. **Богданкевич О. В., Дарзнек С. А., Елисеев А. Г.** Полупроводниковые лазеры. — М.: Наука, 1976.
2. Dye Lasers. Ed. by F. Schäfer. — Berlin-Ouest, 1973.
3. **Данилычев В. А., Керимов О. М., Ковш И. Б.** Оптические квантовые генераторы на сжатых газах. — Труды ФИАН СССР, 1976, т. 85.
4. **Архангельская В. А., Феофилов П. П.** Перестраиваемые лазеры на центрах окраски в ионных кристаллах. — Квантовая электроника, 1980, т. 7, № 6.
5. **Ахманов С. А., Хохлов Р. В.** Об одной возможности усиления световых волн. — ЖЭТФ, 1962, т. 43, № 1.
6. **Kroll N. M.** Parametric amplification in spatially extended media and application to the design of tunable oscillators at optical frequences. — Phys. Rev., 1962, v. 127, № 4.
7. **Kingston R. H.** Parametric amplification and oscillation at optical frequences. — Proc. IRE, 1962, v. 50, N° 4.
8. **Giordmaine J. A., Miller R. C.** Tunable coherent parametric oscillation in $LiNbO_3$ at optical frequences. — Phys. Rev. Letts., 1965, v. 14, N° 24.
9. **Ахманов С. А., Хохлов Р. В.** Проблемы нелинейной оптики (электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах). — М.: ВИНИТИ, 1965.
10. **Ахманов С. А., Дмитриев В. Г., Моденов В. П., Фадеев В. В.** К теории параметрической генерации в резонаторе, заполненном нелинейной средой. — Радиотехника и электроника, 1965, т. 10, № 12.
11. **Bloembergen N.** Nonlinear Optics. — Benjamin (N. Y.), 1965.
12. **Ахманов С. А., Григорьев Ю. В., Дмитриев В. Г., Фадеев В. В., Хохлов Р. В.** К теории параметрических генераторов света. — В кн.: Нелинейная оптика. Труды 2-го Всесоюзн. симпозиума по нелинейной оптике. — Новосибирск: Наука, 1968.

13. **Ахманов С. А., Чиркин А. С.** Статистические явления в нелинейной оптике. — М.: МГУ, 1971.
14. **Обуховский В. В., Стрижевский В. Л.** Теория поляритонного параметрического генератора. — Квантовая электроника, 1974, т. 1, № 6.
15. **Дмитриев В. Г., Еремеева Р. А., Ицхоки И. Я., Карпова Е. П.** К теории нестационарной параметрической генерации. — В кн.: Квантовая электроника. Под ред. Н. Г. Басова. М.: Сов. радио, 1973, вып. 6.
16. **Дьяков Ю. Е., Ковригин А. И.** Теория параметрического генератора света с узкой линией при многомодовой накачке. — Квантовая электроника, 1975, т. 2, № 10.
17. **Джотян Г. П., Дьяков Ю. Е.** К теории однорезонаторного ПГС. — Квантовая электроника, 1977, т. 4, № 11.
18. **Джотян Г. П., Дьяков Ю. Е.** К теории двухрезонаторного параметрического генератора света с многомодовой накачкой. — Квантовая электроника, 1978, т. 5, № 2.
19. **Ахманов С. А., Хохлов Р. В.** Параметрические усилители и генераторы света. — УФН, 1966, т. 88, № 3.
20. **Фишер Р., Кулевский Л. А.** Оптические параметрические генераторы. — Квантовая электроника, 1977, т. 4, № 2.
21. **Дмитриев В. Г., Кулевский Л. А.**, Параметрические генераторы света. — В кн.: Справочник по лазерам в 2-х т./Т. 2. Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Сов. радио, 1978.
22. **Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н.** Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978.
23. **Клышко Д. Н.** Фотоны и нелинейная оптика. — М.: Наука, 1980.
24. **Бутылкин В. С., Каплан А. Е., Хронопуло Ю. Г., Якубович Е. И.** Резонансные взаимодействия света с веществом. — М.: Наука, 1977.
25. **Ильинский Ю. А., Таранухин В. Д.** Теория повышения частоты в газах в условиях двухфотонного резонанса. — Квантовая электроника, 1975, т. 2, № 7.
26. **Крочик Г. М.** Параметрическое усиление на основе четырехволновых параметрических процессов при двухфотонном резонансе. — Квантовая электроника, 1979, т. 6, № 2.
27. **Brunner R., Fischer R., Paul H.** Berechnung der Aufbauzeit eines Doppelrezonanten optischen parametrischen Oszillator. — Ann. Phys., 1974, b. 31, h. 4.
28. **Zernike F., Midwinter J.** Applied Nonlinear Optics. — New York, 1973.
29. **Воляк К. И., Горшков А. С.** Исследование параметрического генератора с обратной волной. — Радиотехника и электроника, 1973, т. 18, № 10.
30. **Дикчюс Г. А.** Высокоэффективное возбуждение параметрической сверхлюминесценции в пикосекундном диапазоне: Канд. дис. — Вильнюс, 1977.
31. **Kung A. H.** Generation of tunable picosecond VUV radiation. — Appl. Phys. Letts, 1974, v. 25, № 11.
32. **Данелюс Р., Дикчюс Г., Кабелка В., Пискарскас А.** Высокоэффективный пикосекундный ПГС с узким спектром излучения и высокой частотой повторения импульсов. — ЖТФ, 1977, т. 47.
33. **Кабелка В., Пискарскас А., Стабинис А., Шер Р.** Групповой синхронизм взаимодействующих сверхкоротких световых импульсов в нелинейных кристаллах. — Квантовая электроника, 1975, т. 2, № 2.
34. **Bjorkholm J. E., Danielmeyer H. G.** Frequency control of a pulsed optical parametric oscillator by radiation injection. — Appl. Phys. Letts., 1969, v. 15, N° 6.
35. **Ицхоки И. Я., Серегин С. Л.** Инициирование параметрической генерации оптическим излучением. — В кн.: Тез. док. Второй Всесоюз. конф. « Оптика лазеров ». — Ленинград, 1979.

36. **Ицхоки И. Я., Серегин С. Л.** Инициирование параметрической генерации оптическим излучением. — Квантовая электроника, 1980, т. 7, № 4.
37. **Ахманов С. А., Дмитриев В. Г.** Оптическая спектроскопия высокого разрешения с помощью параметрических сверхрегенераторов. — Оптика и спектроскопия, 1972, т. 33, № 1.
38. **Bjorkholm J. E.** Some effects of spatially nonuniform pumping in pulsed optical parametric oscillators. — IEEE, 1971, v. QE-7, Nº 3.
39. **Tarassov L.** Physique des processus dans les générateurs de rayonnement optique cohérent. — Moscou, Editions Mir, 1985.
40. **Ananiev Y.** Résonateurs optiques et problème de divergence du rayonnement laser. — Moscou, Editions Mir, 1982.

ANNEXE

CRISTAUX NON LINÉAIRES UTILISÉS POUR LA GÉNÉRATION D'HARMONIQUES ET LA GÉNÉRATION PARAMÉTRIQUE DE LUMIÈRE

Qualités exigées des cristaux non linéaires. — Actuellement on connaît un grand nombre de cristaux non linéaires dans lesquels peuvent se produire des interactions non linéaires à trois fréquences (v. par exemple [1]). Pourtant les exigences auxquelles doivent satisfaire les cristaux pour assurer les caractéristiques désirées des dispositifs optiques non linéaires (générateurs d'harmoniques et générateurs paramétriques de lumière) réduisent considérablement le nombre de matériaux aptes à l'utilisation pratique.

Signalons tout d'abord deux exigences principales: la présence de la non-linéarité quadratique (l'absence de centre de symétrie) et la présence de la biréfringence suffisante pour assurer les conditions de synchronisme de phase. Si le nombre de cristaux et de composés organiques qui satisfont à la première exigence est grand (~100), il n'existe que relativement peu de matériaux satisfaisant à la seconde exigence. Indiquons également une haute qualité optique demandée aux cristaux à cause de la nature interférentielle des effets non linéaires quadratiques. En outre, il importe que des cristaux ayant des dimensionss suffisamment grandes possèdent une haute qualité optique.

D'autres qualités que l'on demande d'une manière traditionnelle aux cristaux dès le début du développement de l'optique non linéaire sont les suivantes: la résistance de la surface et du corps d'échantillon au rayonnement laser, la stabilité et la non-altération des propriétés du matériau dans le milieu environnant (non hydroscopicité, dureté, tenue aux variations brusques de température, etc.). L'évolution de l'optique non linéaire a posé toute une série de nouvelles exigences très importantes au point de vue de l'obtention des coefficients de conversion élevés. Ce sont: les fortes valeurs des largeurs angulaire, de température et spectrale du synchronisme, les faibles pertes, l'absence d'effet photoréfractif et d'absorption non linéaire, la faible influence des processus concurrents (par exemple, de diffusion Raman stimulée), l'orientation spéciale et la forme géométrique spéciale de l'échantillon cristallin, l'insensibilité à l'apparition de centres de coloration sous l'effet du rayonnement ultraviolet et des rayonnements de longueur d'onde plus courte, etc.

Comme la technique actuelle ne permet pas de synthétiser des matériaux non linéaires possédant toutes les qualités nécessaires [1]), il convient de faire un choix optimal des cristaux non linéaires conformément au dispositif optique concret, en tenant compte de ses régimes et des caractéristiques du rayonnement de pompage.

Systématisation et propriétés des cristaux non linéaires. — Les cristaux non linéaires utilisés en pratique peuvent être divisés en deux groupes: les cristaux

[1]) Les recherches en ce sens sont menées dans le domaine des matériaux organiques non linéaires.

obtenus à partir de solutions aqueuses et les cristaux croissant à partir de bains fondus. Le représentant du premier groupe est le cristal de KDP, et celui du second groupe, le cristal de niobate de lithium. Les cristaux solubles dans l'eau sont des matériaux doux, ils sont hygroscopiques, résistent mal aux variations brusques de température et se caractérisent par une non-linéarité relativement faible. D'un autre côté, ces cristaux se caractérisent par une haute qualité optique pour de fortes ouvertures et longueurs, sont faciles à synthétiser, résistent bien au rayonnement laser. Par contre, les cristaux que l'on fait croître à partir des bains fondus (cristaux de haute température) sont durs, non hygroscopiques, résistent bien aux variations brusques de température et se caractérisent par une haute non-linéarité. Mais leur qualité optique est nettement inférieure à celle des cristaux solubles dans l'eau, ce qui s'explique par la physique des processus de croissance; ils sont plus sensibles à divers effets induits (du type de l'effet photoréfractif). La résistance de leur surface au rayonnement laser est beaucoup plus faible que celle des cristaux solubles dans l'eau. Notons également qu'on ne réussit pas encore à faire croître des cristaux de haute température ayant des dimensions suffisamment grandes avec la conservation de la qualité optique acceptable. Le domaine de transparence des cristaux solubles dans l'eau est en règle générale décalé vers l'ultraviolet proche, alors que celui des cristaux de haute température l'est vers l'infrarouge proche.

Des cristaux concrets appartenant aux deux groupes présentent des avantages et des inconvénients bien déterminés. C'est ainsi que le synchronisme à 90° non critique est un avantage, alors qu'une forte biréfringence dans la direction de synchronisme est un inconvénient. Un choix optimal d'un cristal non linéaire ou d'un autre ne peut se faire qu'à condition de comparer l'ensemble des paramètres du cristal avec les régimes du laser émettant le rayonnement de fréquence fondamentale et avec les caractéristiques de ce rayonnement. Les propriétés et les domaines d'emploi de différents cristaux non linéaires peuvent être examinés à l'aide des Tableaux A.1, A.2 et A.3 dressés d'après les ouvrages [1] à [5].

Le Tableau A.1 indique, pour différents cristaux, la formule chimique, la classe de symétrie, l'indice de réfraction pour l'onde ordinaire, le domaine de transparence, la résistance au rayonnement laser (seuil de destruction), le coefficient non linéaire, calculé par rapport à la composante d_{36} du tenseur χ d'un cristal de KDP ($d_{36} = 1{,}13 \cdot 10^{-9}$ CGSE) et le coefficient relatif de qualité d^2/n_0^3. On voit que le plus efficace est le cristal de niobate de baryum-sodium; il est suivi de l'iodate de lithium, de l'acide α-iodique, du niobate de lithium, des cristaux du groupe de KDP. Mais le choix de tel ou tel cristal suivant le coefficient de qualité ne peut se faire qu'en première approximation. Ainsi, pour l'obtention d'harmoniques de rayonnement à faible densité de puissance (par exemple, du rayonnement émis par un laser continu) il est nécessaire de toute évidence d'utiliser des cristaux fortement non linéaires du type de niobate de baryum-sodium ou d'iodate de lithium. Mais pour la production d'harmoniques de rayonnement émis par des lasers pulsés de grande puissance il est préférable d'utiliser des cristaux du groupe de KDP, faiblement non linéaires, mais résistants aux impulsions laser de haute intensité. Des recommandations plus détaillées peuvent être données en tenant compte des propriétés des cristaux rassemblées dans les Tableaux A.2 et A.3.

Le Tableau A.2 indique les expressions pour les produits de la forme $\mathbf{e}_1$ (χ: $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$) et $\mathbf{e}_2$ (χ: $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$) qui entrent dans les coefficients de couplage non linéaire (l'expression correspondante pour le niobate de lithium dans le cas du synchronisme *ooe* a été obtenue au § 2.2). L'orientation du cristal, c'est-à-dire le choix des angles directeurs φ et θ, peut avoir une influence considérable sur les coefficients de couplage non linéaire. Remarquons que $\theta = \theta_S$, où θ_S est l'angle de synchronisme. Le choix de θ_S peut être réalisé par variation d'un autre paramètre, par exemple, de la température.

Les valeurs des coefficients de couplage non linéaire des cristaux utilisés

Tableau A.1

Dénomination du cristal	Formule chimique	Classe de symétrie	n_0 (pour 1,06 µm)	Domaine de transparence, µm	Seuil de destruction, MW/cm²	d/d_{36}	d^2/n_0^3
Dihydrophosphate de potassium (KDP)	KH_2PO_4		1,49	0,25-1,7	400	1,0	1,0
Dideutérophosphate de potassium [DKDP (KD*P)]	$KH_{2-2x}D_{2x}PO_4$		1,47	0,20-1,7	500	1,1	1,3
Dihydrophosphate d'ammonium (ADP)	$NH_4H_2PO_4$		1,50	0,13-1,7	500	1,2	1,4
Dideutérophosphate d'ammonium [DADP (AD*P)]	$NH_4H_{2-2x}D_{2x}PO_4$	D_{2d} ($\bar{4}\,2m$)	1,50		500	1,2	1,4
Dihydrophosphate de rubidium (RDP)	$Rb\ H_2PO_4$		1,49		300	0,9	0,8
Dihydroarséniate de césium (CDA)	CsH_2AsO_4		1,55	0,26-1,43	500	0,9	0,7
Dideutéroarséniate de césium [DCDA (CD*A)]	$CsH_{2-2x}D_{2x}AsO_4$		1,55	0,27-1,66	500	0,9	0,7
Iodate de lithium	$LiIO_3$	C_6 (6)	1,86	0,30-6,0	60	14,0	100
Niobate de lithium	$LiNbO_3$	C_{3v} (3m)	2,23	0,33-6,7	120	13,4	53,4
Niobate de baryum-sodium	$Ba_2NaNb_5O_{15}$	C_{2v}	2,26	0,38-6,0	⩽100	38,0	413
Formiate de lithium	$LiCOOH \cdot H_2O$	(*mm* 2)	1,36		⩾500	2,5	8,2
Acide α-iodique	α-HIO_3	D_2 (222)	1,94		~100	14,0	88,6

Notes : a) dans les formules pour les cristaux de DKDP, de DADP et de DCDA la quantité x est le degré de deutération ($0 \leqslant x \leqslant 1$) ; b) des désignations de la classe de symétrie sont données d'après Schönflies et (entre parenthèses) dans le système international ; c) dans les cristaux uniaxiaux, n_0 est l'indice de réfraction pour l'onde ordinaire, et dans les cristaux biaxiaux, c'est la valeur moyenne de l'indice de réfraction ; d) d est la plus grande composante du tenseur d_{ij} pour un cristal donné ; e) d_{36} est la composante du tenseur de susceptibilité quadratique d'un cristal de KDP ; $d_{36} = 1,13 \cdot 10^{-9}$ CGSE.

Tableau A.2

Classe de symétrie	Représentant	Composantes non nulles indépendantes	Expressions de la forme $e_1 (\chi : e_1 e_2)$, $e_2 (\chi : e_1 e_2)$ lors de la génération de deuxième harmonique	
			synchronisme *ooe*	synchronisme ooe
D_{2d}	KDP	$d_{14} = d_{25}$; d_{36}	$d_{36} \sin \theta \sin 2\varphi$	$\frac{1}{2} (d_{14} + d_{36}) \sin 2\theta \cos 2\varphi$
C_6	$LiIO_3$	$d_{24} = d_{15}$; $d_{31} = d_{32}$; d_{33} ; $d_{14} = -d_{25}$	$d_{31} \sin \theta$	$\frac{1}{2} d_{14} \sin 2\theta$
C_{3v}	$LiNbO_3$	$d_{15} = d_{24} = d_{31} = d_{32}$; $d_{22} = -d_{16} = d_{21}$; d_{33}	$d_{15} \sin \theta - d_{22} \cos \theta \sin 3\varphi$	$d_{22} \cos^2 \theta \cos 3\varphi$
D_2	α-HIO_3	d_{14} ; d_{25} ; d_{36}	$d_{36} \sin 2\theta \cos 2\varphi$	$d_{36} \sin \theta \sin 2\varphi$
C_{2v}	$Ba_2NaNb_5O_{15}$	$d_{31} = d_{15}$; $d_{32} = d_{24}$; d_{33}	$\frac{1}{2} (d_{31} - d_{32}) \sin 2\theta \sin 2\varphi +$ $+ 3 (d_{31} \cos^2 \varphi + d_{32} \sin^2 \varphi) \times$ $\times \sin \theta \cos^2 \theta$	$-3 (d_{31} \cos^2 \varphi + d_{32} \sin^2 \varphi) \times$ $\times \sin \theta \cos^2 \theta - (d_{31} \sin^2 \varphi +$ $+ d_{32} \cos^2 \varphi) \sin \theta$

Tableau A.3

Cristal et type de synchronisme		$\chi \cdot 10^9$, CGSE	θ_s, deg	$\sigma \cdot 10^6$, V^{-1}	$\partial\theta_s/\partial\lambda$, mn d'angle/Å	$\delta\lambda$, Å	$\partial\Delta k/\partial\theta$, $cm^{-1}rd^{-1}$	$\delta\theta$, mn d'angle	$\delta\theta_s/\partial T$, mn d'angle/°C	δT, °C
KDP	*ooe*	1,13	41,5	1,24	0,05	283	3310	5,8	0,23	25,1
	ooe		57-59	1,63	0,1	115	1660	11,5	0,6	19,1
ADP	*ooe*	1,36	41,5	1,49	0,05	310	3640	5,2	1,93	2,7
	oee		61,2	1,89	0,1	97	1860	10,3	4,9	2,1
DKDP	*ooe*	1,03	53	1,64	0,18	65	1680	11,5	0,55	20,9
CDA	*ooe*	0,96	82	1,57	0,18	224	470	40,4	7,9	5,1
RDP	*ooe*	1,03	50	1,15	0,04	135	3290	5,8	0,67	25,0
	oee		83	0,47	1,85	25	410	46,2	1,46	8,7
$LiIO_3$	*ooe*	13,2	30	8,83	0,3	7	9050	2,1	—	—
	oee	0,52	43,8	0,7	0,55	6,8	5120	3,7		
$LiNbO_3$	*ooe*	$\chi_{31} = 13{,}0$ $\chi_{22} = 6{,}6$	78	15,6	3,6	3	1770	10,8	10,0	1,1
$Ba_2NaNb_5O_{15}$	*ooe*	44	74	46,7	2,7	3,1	2250	8,3	9,7	0,8
$LiCOOH \cdot H_2O$	*ooe*	3,0	56	4,2	0,19	30	3350	5,7	0,23	24,7
	oee		82		0,34	34	1650	11,6	1,13	9,8
α-HIO_3	*ooe*	11,8	10	2,68	0,61	4,3	7150	2,7	1,1	2,5
	oee		55	14,5	1,0	3,8	5000	3,8	0,8	4,6
0,53 µm → 0,26 µm										
KDP	*ooe*	1,13	77	3,59	4,3	1,3	3600	5,7	5	1,2
ADP	*ooe*	1,36	82	4,40	6,25	1,4	2370	8,7	13	0,7
$LiCOOH \cdot H_2O$	*ooe*	3,0	32	5,3	0,64	1,0	31850	0,6	—	—

pour la génération de deuxième harmonique du rayonnement des lasers au néodyme sont indiquées dans le Tableau A.3 [3]. D'après l'efficacité de la conversion (dans les ondes planes), la première place est occupée par le niobate de baryum-sodium; il est suivi par l'acide α-iodique (synchronisme *oee*) et l'iodate de lithium (synchronisme *ooe*). Ce Tableau donne également les largeurs angulaires, de température et spectrales des courbes de synchronisme. A ce propos il convient de donner quelques explications relatives aux coefficients de dispersion correspondants (les coefficients angulaires ont été traités au § 2.5).

Coefficients de dispersion angulaires, de température et spectraux. — Dans le cas général, les indices de réfraction dépendent de l'angle θ, de la température T et de la longueur de l'onde fondamentale λ_1. Une variation de n'importe lequel de ces paramètres produit une variation du désaccord d'onde. En développant la fonction $\Delta k\,(\theta, T, \lambda_1)$ en une série suivant les petits écarts des arguments par rapport aux valeurs correspondant au synchronisme ($\Delta k\,(\theta_S, T_S, \lambda_{1S}) = 0$), écrivons

$$\Delta k\,(\theta,\ T,\ \lambda_1) = \gamma_1\,\Delta\theta + \gamma_2\,\Delta T + \gamma_3\,\Delta\lambda_1 + \ldots \tag{A.1}$$

Ici

$$\Delta\theta = \theta - \theta_S\,; \quad \Delta T = T - T_S\,; \quad \Delta\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_{1S}\,;$$

$$\gamma_1 = \partial\Delta k/\partial\,(\theta - \theta_S)\,|_{\theta_S,\,T_S,\,\lambda_{1S}} \tag{A.2}$$

est le coefficient de dispersion *angulaire*;

$$\gamma_2 = \partial\Delta k/\partial\,(T - T_S)\,|_{\theta_S,\,T_S,\,\lambda_{1S}} \tag{A3}$$

le coefficient de dispersion *de température*;

$$\gamma_3 = \partial\Delta k/\partial\,(\lambda_1 - \lambda_{1S})\,|_{\theta_S,\,T_S,\,\lambda_{1S}} \tag{A.4}$$

le coefficient de dispersion *spectral*. Ces coefficients sont des coefficients de dispersion du premier ordre. Dans le cas d'un synchronisme non critique (ce qui correspond, par exemple pour la dépendance angulaire, à $\theta_S = 90°$) les coefficients de dispersion du premier ordre s'annulent; dans un tel cas il convient d'utiliser dans le développement (A.1) les dérivées secondes.

A l'approximation du champ constant de rayonnement fondamental il n'est pas difficile de déterminer les largeurs des courbes de synchronisme angulaire, de température et spectrale, c'est-à-dire les fonctions $a_2\,(\theta, l)$, $a_2\,(T, l)$, $a_2\,(\lambda_1, l)$, au niveau de 0,41 de l'intensité, en utilisant à cet effet la relation (2.4.51). En posant, pour simplifier, $l = 1$ cm, on obtient les valeurs suivantes des largeurs correspondantes:

$$\delta\theta = 2\pi/\gamma_1\,; \quad \delta T = 2\pi/\gamma_2\,; \quad \delta\lambda_1 = 2\pi/\gamma_3. \tag{A.5}$$

Dans le Tableau A.3 les largeurs des synchronismes sont déterminées au niveau de 0,5 de l'intensité; dans ce cas, au lieu de la relation (2.4.51) on utilise la relation $\Delta kl = 2{,}78$ si bien qu'au lieu de (A.5) on obtient

$$\delta\theta = 5{,}56/\gamma_1\,; \quad \delta T = 5{,}56/\gamma_2\,; \quad \delta\lambda_1 = 5{,}56/\gamma_3. \tag{A.6}$$

Indiquons les relations qui existent entre les coefficients de dispersion et les dérivées $\partial\theta_S/\partial T$ et $\partial\theta_S/\partial\lambda_1$ données dans le Tableau A.3:

$$\gamma_2 = \frac{\partial\Delta k}{\partial T} = \frac{\partial\Delta k}{\partial\Delta\theta}\,\frac{\partial\theta_S}{\partial T} = \gamma_1\,\frac{\partial\theta_S}{\partial T}\,; \tag{A.7}$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial \Delta k}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial \Delta k}{\partial \Delta \theta} \frac{\partial \theta_s}{\partial \lambda_1} = \gamma_1 \frac{\partial \theta_s}{\partial \lambda_1}. \qquad \text{(A.8)}$$

Recommandations pour le choix des cristaux non linéaires. — La comparaison des valeurs des coefficients de couplage non linéaire (Tableau A.3) montre que pour les ondes planes (en l'absence d'effets d'ouverture angulaire et de diaphragme. de photoréfraction, d'auto-actions thermiques, etc.) le plus efficace est le cristal de niobate de baryum-sodium. Pourtant une résistance relativement faible au rayonnement laser et les difficultés que présente la croissance d'échantillons monodomaines de dimensions suffisamment grandes ne permettent pas de le recommander pour la génération de deuxième harmonique des lasers pulsés de grande puissance. Ce cristal est particulièrement apte à être utilisé pour la génération intracavité de deuxième harmonique des lasers continus, dont la densité de puissance à l'intérieur de la cavité ne dépasse pas 10^6 W/cm^2. Dans ces conditions, la longueur optimale du cristal de 3 à 5 mm assure une puissance de sortie de l'harmonique de l'ordre de 1 à 2 W en régime continu. Un avantage du niobate de baryum-sodium est qu'il permet de réaliser un synchronisme non critique (voisin de celui à 90°) et d'utiliser donc des faisceaux focalisés. Pourtant l'utilisation de ce cristal exige d'assurer une stabilisation de température sévère et un contact thermique parfait (Bi $= \infty$) avec le thermostat; dans le cas contraire, la courbe de synchronisme de température devient instable. La largeur de température étant petite, les auto-actions thermiques dans ce cristal demandent de prévoir une contre-réaction en rayonnement de sortie de l'harmonique. En pratique, on est amené à accepter ces complications techniques puisque le cristal de niobate de baryum-sodium est jusqu'à présent le seul cristal qui puisse être utilisé pour l'obtention des puissances en continu de l'ordre du watt du deuxième harmonique des lasers continus au néodyme avec des coefficients de conversion voisins des coefficients optimaux. L'utilisation des cristaux d'iodate et de niobate de lithium dans le cas du pompage au moyen de lasers continus n'assure un rendement global du générateur que de 2 à 3 fois plus petit que celui que donne le niobate de baryum-sodium.

L'utilisation des lasers à solides à pompage continu, fonctionnant en régime déclenché, permet d'élever de q fois la densité de puissance par impulsion du rayonnement fondamental par rapport à la puissance moyenne, q étant le facteur de forme des impulsions. Le rayonnement émis par de tels lasers présente en règle générale une plus grande ouverture, ce qui exige d'utiliser des échantillons de dimensions relativement grandes. Les cristaux utilisés dans ce cas doivent être fortement non linéaires vu que q n'excède pas 10^3. Dans ces conditions, on a souvent recours à la focalisation du rayonnement sur le cristal en association avec le régime de GICDH. Dans de tels cas les cristaux de niobate de lithium et d'iodate de lithium sont aptes à être utilisés. Bien que le coefficient de couplage non linéaire du niobate de lithium soit presque deux fois plus grand que celui de l'iodate de lithium (Tableau A.3), ce dernier peut s'avérer préférable parce que sa qualité optique est plus haute (l'iodate de lithium est un cristal soluble dans l'eau) et il permet de réaliser des échantillons à grande ouverture, en outre, sa dépendance de l'angle de synchronisme vis-à-vis de la température est plus faible que celle du niobate de lithium (ce qui permet de se passer du thermostat à régulateur de température). Lorsqu'on utilise les cristaux d'iodate de lithium, on peut négliger l'influence des auto-actions thermiques et de l'effet photoréfractif. En même temps, le petit angle de synchronisme dans l'iodate de lithium, égal à environ 30°, provoque un effet d'ouverture de diaphragme notable (pour compenser cet effet on a recours à des circuits comportant des cristaux à orientation différente des axes optiques que l'on place en série; v. fig. 3.31, *a*). A la différence de l'iodate de lithium, le niobate de lithium permet de réaliser le synchronisme à 90°.

L'utilisation du niobate de lithium pour la GICDH dans des lasers à pompage continu fonctionnant en régime déclenché permet d'obtenir un rendement

plus élevé que dans le cas d'utilisation de l'iodate de lithium. Par contre, les schémas pour la GICDH avec le niobate de lithium sont plus compliqués parce qu'ils nécessitent les régulateurs de température de précision contrôlés par un circuit de contre-réaction. En outre, pour réaliser une température de synchronisme à 90° supérieure à 170 °C on doit utiliser des bains fondus ayant une composition spécialement étudiée [6].

Lors de la GICDH à l'iodate de lithium, la structure de la tache de l'harmonique dans la zone lointaine se présente sous la forme de « bandes » (de franges d'interférence). Ceci tient à ce que le synchronisme dans l'iodate de lithium est très sensible à la valeur de l'angle (le plus sensible de tous les cristaux; v. Tableau A.3), de sorte qu'une focalisation du rayonnement sur le cristal, si faible soit-elle, conduit à l'apparition de bandes dans le plan de synchronisme. Si l'on utilise le niobate de lithium, la section transversale du faisceau de l'harmonique est nettement plus uniforme, ce qui s'explique par le fait que le synchronisme n'est pas sensible à la valeur de l'angle.

Dans les lasers au néodyme à pompage par impulsion fonctionnant aux régimes caractérisés par des puissances de 1 à 10 MW par impulsion du rayonnement fondamental et des fréquences de répétition d'impulsions de 10 à 100 GHz, on peut utiliser les cristaux de niobate et d'iodate de lithium ainsi que les cristaux de CDA et de DCDA. Si les densités de puissance de rayonnement fondamental sont faibles (30 à 50 MW/cm^2), il est préférable d'utiliser l'iodate de lithium qui n'exige pas d'assurer une stabilisation de température de précision. Cependant, il est alors nécessaire de placer les cristaux l'un après l'autre (en série) pour compenser l'effet d'ouverture de diaphragme. Lorsque les densités de puissance du rayonnement fondamental sont portées à $\sim$100 MW/cm^2, on utilise les cristaux de niobate de lithium dans les shémas à stabilisateurs de température et à circuits de contre-réaction (pour éliminer l'instabilité de la courbe de synchronisme en fonction de la température). Si la densité de puissance du rayonnement croît encore, on doit avoir recours à des cristaux du groupe de KDP solubles dans l'eau.

Dans les lasers à néodyme pulsés émettant sur plusieurs modes un rayonnement, dont la densité de puissance va de 100 à 300 MW/cm^2 et la puissance moyenne est de l'ordre de quelques watts (faibles fréquences de répétition d'impulsions), on peut utiliser avec succès les cristaux de CDA maintenus à la température de synchronisme avec une précision relativement peu élevée. Un inconvénient du cristal de CDA est que la température du synchronisme à 90° est proche de la température ordinaire, ce qui exige d'assurer un refroidissement forcé. Le cristal de CDA étant très sensible à l'influence des auto-actions thermiques (v. fig. 3.12), son utilisation pour des puissances moyennes du rayonnement fondamental supérieures à environ 10 W est à déconseiller. Le passage au cristal de DCDA permet d'augmenter davantage la puissance moyenne (au-delà de 10 W). Il y a lieu de noter que dans le cristal de DCDA la température de synchronisme à 90° augmente avec le degré de deutération; elle peut atteindre une valeur ($\sim$100 °C) pour laquelle les cristaux solubles dans l'eau deviennent instables. On doit également tenir compte du fait que les cristaux du groupe de KDP supportent mal les variations brusques de température; la vitesse de leur échauffement ou de refroidissement ne doit pas dépasser 5 °C/mn [5].

L'utilisation des cristaux de CDA et de DCDA pour la duplication de fréquence des lasers à néodyme pulsés multimodes, fonctionnant en régime périodique, s'explique en premier lieu par le fait que le synchronisme dans ces cristaux n'est pas sensible envers l'angle ($\delta\theta \approx 40$ mn d'angle; v. Tableau A.3). Dans le cas des lasers monomodes il est plus raisonnable d'utiliser les cristaux de KDP (pour de faibles puissances moyennes, du rayonnement fondamental) et de DKDP (pour des puissances moyennes de l'ordre de 10 W) étant donné qu'ils sont plus accessibles et moins coûteux que les cristaux de CDA et de DCDA. On peut également utiliser les cristaux de ADP et de DADP. Le coefficient de couplage non linéaire pour le cristal de KDP est comparable, dans le cas du synchro-

nisme *oee*, à celui du cristal de CDA au synchronisme *ooe* à 90°, alors que les fortes longueurs et la haute qualité des cristaux de KDP et de DKDP associées à une faible divergence du rayonnement monomode assurent une grande efficacité de la conversion (30 à 40 %).

A noter que les cristaux de KDP (DKDP) peuvent également être utilisés (lorsque les cristaux de CDA et de DCDA ne sont pas disponibles) en régime multimode à condition d'avoir recours à des circuits permettant de compenser l'effet d'ouverture angulaire.

A ce qu'il paraît, la création d'harmoniques, qui se caractérisent par de fortes valeurs de l'énergie et de la puissance par impulsion, n'est actuellement possible dans des lasers à néodyme de grande puissance fonctionnant avec de faibles fréquences de répétition d'impulsions (ainsi qu'en régime d'impulsions uniques) qu'à l'aide des cristaux possédant de grandes ouvertures et longueurs utiles. Les grandes ouvertures s'expliquent par la nécessité d'élargir le faisceau de rayonnement fondamental pour réduire la densité de puissance par impulsion jusqu'à des valeurs non supérieures à 400 MW/cm². De telles ouvertures ne sont réalisées de nos jours, à condition de conserver une haute qualité optique, que pour des cristaux de KDP.

Les recommandations exposées plus haut sont valables pour la génération de deuxième harmonique du rayonnement émis par les lasers à néodyme à la longueur d'onde $\lambda = 1{,}06$ µm. Les lasers à néodyme émettent également de façon efficace à $\lambda = 1{,}32$ µm. Pour la production de deuxième harmonique des lasers émettant à 1,32 µm il est recommandé d'utiliser les cristaux de niobate de baryum-lithium (pour le fonctionnement continu), de niobate et d'iodate de lithium (pour le fonctionnement en impulsions avec une densité de puissance de rayonnement non supérieure à 100 MW/cm²). L'obtention de l'harmonique du rayonnement à $\lambda = 1{,}32$ µm exige d'utiliser des doubleurs de fréquences multicanaux (mis en parallèle). Pour la duplication de fréquence des lasers à rubis, qui sont actuellement relativement peu utilisés, c'est le cristal de RDP qui est efficace.

Pour la production de quatrième harmonique des lasers à néodyme (1,06 µm → 0,26 µm) ce ne sont que les cristaux de KDP, de ADP et de formiate de lithium qui trouvent une application pratique. Comme le montre le Tableau A.3, les coefficients de couplage non linéaire lors de la transformation de 0,53 µm en 0,26 µm sont pour ces cristaux suffisamment grands, ce qui assure un haut coefficient de conversion de l'onde fondamentale en quatrième harmonique.

Parmi les cristaux apparus ces derniers temps signalons le pentaborate de potassium (KPB), qui est efficace pour la transformation de la lumière visible en ultraviolet lointain, et le titanate-phosphate de potassium (KTP), qui se caractérise par un coefficient de non-linéarité bien élevé. Ces cristaux sont encore au stade de laboratoire et le degré de leur étude est encore insuffisant. Les matériaux non linéaires organiques suscitent eux aussi un certain intérêt [7].

Pour les GPL fonctionnant dans l'infrarouge proche (jusqu'à 5 µm), les plus efficaces sont les cristaux congruents de niobate de lithium à orientation de 47°. Pourtant, dans ce cas aussi, l'efficacité de la conversion du rayonnement des lasers à néodyme en rayonnement de GPL n'est pas grande même au maximum de la courbe d'accord en fréquence (~10 %).

Bibliographie

1. **Синг С.** Нелинейные оптические материалы. — В кн.: Справочник по лазерам в 2-х т./Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Сов. радио, 1978. — Т. 2.
2. **Дмитриев В. Г., Нцхоки Н. Я.** Оптические умножители частоты. — В кн.: Справочник по лазерам в 2-х т./Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Сов. радио, 1978. — Т. 2.

3. **Волосов В. Д.** Генерация гармоник и смешение частот лазерного излучения в нелинейных кристаллах. Докт. дис./ГОИ им. С. И. Вавилова. — Ленинград, 1980.
4. **Zernike F., Midwinter J.** Applied Nonlinear Optics. — New York, 1973.
5. **Koechner W.** Solid-state laser engineering. — New York — Heidelberg — Berlin : Springer — Verlag, 1976.
6. **Кузьминов Ю. С.** Ниобат и танталат лития. — М.: Наука, 1975.
7. **Шигорин В. Д.** Исследование генерации второй оптической гармоники в молекулярных кристаллах. — Труды ФИАН СССР, 1977, т. 98.

INDEX

TABLE DES MATIÈRES